

# 経済数学 I 授業概観：ミクロ経済学 I との 関係と基礎的計算力をめぐって

仲 澤 幸 壽

## 1. はじめに

筆者は既に永年に亘って本学経済学部1年次生対象の「ミクロ経済学 I」と「経済数学 I」を併せて担当してきた<sup>1)</sup>。これらの科目は経済学の入門科目であるとともに内容が関連している部分が多いことから、セットで提供し履修させることによって学生の理解がより深まることが期待されており、前期と後期の同じ曜日の同じ時間帯（月曜日2時間目、金曜日1時間目）に配置されている。初期の頃は双方ともほぼ全員の経済学部新入生が受講していたが、近年はミクロ経済学 I の受講率が100%であるのに対して、経済数学 I は5%~10%程度が受講していない。最終試験でも、経済数学 I では欠席率が高い傾向にある。

従来、基礎的な経済数学は統計学等とともに、経済理論を学ぶ前に身に付けておく知識として位置づけられてきた。しかし、担当してみると、〈数学を使わない基礎経済学 → 基礎的経済数学 → 数学も使う高次の経済学〉という順序での学習の方が高い効果をもたらすことに気付いた。つまり、ミクロ経済学 I を先に学んで、後から経済数学 I を学ぶ方が多くの学生にとって効率的ということである。

もっとも、少数ではあるが一定割合の学生にとって、数学的形式の議論が多い双方の科目ともに苦手意識を持ってしまうという逆の意味での相乗作用もあるようである。また、一方の科目は良い成績だが、他方はあまり良くないという具合に、相互の関連性が見られない学生も存在する。それは、大学での勉学への適応の度合いのによる場合もあるし、当該学生の授業に取り組む姿勢の変化という場合もある<sup>2)</sup>。適応と言っても、学習の仕方を身に付ける場合と、単位が取れさえすればいいという安易な考え

---

1) 2015年度からはミクロ経済学 I の担当は交代することになった。

方を覚えるケースとがある。残念ながら、後者が多数見受けられるのが日本の大学の現状であろう。

この授業研究の論考では、マイクロ経済学 I の学習が経済数学 I を理解しやすくする面、それほど効果が表れていない面、数学的内容の授業そのものにおける課題や最近顕在化した問題等を、経済数学 I の担当経験から考察していく。

## 2. テキスト

以下の議論の参考のために、やや冗長になるが、双方の授業で用いているテキストについて説明しておきたい。大学の 1 年次の入門科目では、自分で本を読んで考えるという大学での勉学方法を覚えさせるという意味でも、テキストを指定して読ませるという方法はかなり重要だと感じているからである。マイクロ経済学 I では、初期において金谷・吉田 (1999) を使用し、途中で神戸他 (2006) へ切り替え、現在は金谷・吉田 (2009) へ変更している。

最初にテキストを選定するときには、新入生向けということから平易な解説と、練習問題や例題といったものの解説に重点を置いた。高校から進学してきたばかりの学生にとって、例えば「技術革新によって製品の製造コストが低下したとき市場価格にどのような変化が起きるか説明せよ」といった問題に対して、需要と供給の図を描きまく文章化して解答することは教える側が想像する以上に難しい作業だからである。文章での説明を求められることに戸惑う学生の様子を見て、そのような文章での解答の仕方の説明があるテキストが望ましいことが分かった。そのような観点から、2000 年前後に出版されたものを相当数比較して、金谷・吉田 (1999) を選んだ。

数年後、同じテキストを使用し続ける弊害が見られるようになって変更することになった。同じテキストを使用し続ける弊害とは、学生が試験内容等を毎年同じものとみなして試験対策の勉強範囲を限定したり (いわゆる「山を賭ける」こと)、授業への出席率が低下したりすることである。そこで、記述の方法がやや現代的な神戸他 (2006) に切り替えた。このテキストの解説には、いくつか特徴的な点がある。費用曲線の解説において、総費用曲線の形状が異なるケースが混在する形で出てくる点が 1 つであり、消費者行動理論の解説では最終的に個人の需要曲線が導出されずに終了

---

2) 新入生の場合、それまでの学校生活と大学生活の違いや心身の成長過程の関係で、入学後に大きな変化を見せるケースが多々ある。良い方向への変化もあるが、精神的に不安定な方向へ向かってしまうことが見られるのも周知の通りである。

している点が2つめである。また、練習問題にはすべて詳細な解答がつけられているのだが、いくつかの優れた練習問題はあるものの、数値計算問題が多いというのも特徴である。これらの理由と、やはり継続して同じテキストを使用する弊害が現れだしたこともあって、金谷・吉田（2008）の新版に再変更した。

金谷・吉田（2008）は旧版と比較すると、最後に貿易理論が追加されている点だけが違いである。その一方、情報の非対称性や外部性の解説がまったくない。マイクロ経済学の入門講座で何を教えるか決まっているわけではないが、完全競争の最適性と初歩の不完全競争の次は、ゲーム理論の初歩と情報の非対称性が良いのではないかと筆者は考えている。いずれにしても、旧版の内容だけで授業時間がほぼ終わるので、追加された貿易理論の章は授業では解説できていない。なので、版が変わっても授業を構成する内容はほぼ同じである。

これまでに末尾の参考テキストのリストにあるような入門的テキストが数多く出版されている。これら以外にも翻訳物等、多くのテキストを常に注意して比較しているが、今すぐに変更したいと思うまでには至っていない。筆者は、テキストを学生が繰り返し読むようにしてくれることを最善の学習姿勢であると考えている。その際、テキストの解説の質が重要であるが、平易な文章と正確な解説のバランスやレイアウトからくる読み易さ等で、新しく出たものが現在のものを超えるとは言いえないと判断している。

マイクロ経済学 I のテキストは上記のように変化してきたが、経済数学 I のテキストは一貫しており、竹之内（1998）から途中で版が改められたので竹之内（2009）になっただけである。数学という内容のせいも、同じテキストを使い続けることの弊害はさほど見受けられない。このテキストは1次関数といった基礎的関数の復習から偏微分と全微分を解説する前半と線形代数の初歩を解説する後半とに分かれている。微分の計算のしかたを丁寧に解説するために、経済数学 I では前半部分のみが授業範囲になっている。このテキストは、単に数学的知識を解説するだけでなく、経済学での応用例を多く含んでいる。経済学の応用例がある方が学生にとって授業の目的が具体的に分かりやすく、その分モチベーションの維持が容易である。他のテキストでも、水野（2004a, b）等では経済学の応用例を多く取り入れて書かれている。それに対して川西（2010）や岡部他（2004）のように純粹に数学的基礎知識を解説するものもかなり出版されているが、その場合には解説される数学の知識をどのように使うかが不明のまま学ぶことになるので、数学そのものに興味を持っている学生以外ではモチベーションの維持が困難である。その意味でも、竹ノ内（2009）は名著といえる。

### 3. 授業の提供の順番と効率性

ここで取り上げている2つの科目は、前期にミクロ経済学 I、後期に経済数学 I の順番で提供されている。しかし、初期の頃は年度によってこの順番を入れ替えたこともある。それは、本学がセメスター制を採用した際に、原則として前期提供科目と後期提供科目とも隔年で入れ替えるという時間割編成方針を経済学部が採用したためであった。通例の入門的な経済学のテキストには経済学の勉強をする前に数学や統計学の基礎知識を学んでおいた方が良くと書かれているので、経済数学 I を前期にするのが正しいようにも思われる。しかし、実際に授業をすると、そのやり方には非効率の側面が多い。

その理由の1つは、ミクロ経済学の入門書の内容であり、グラフは多数出てくるが数式展開による説明はほとんどないということである。つまり、グラフさえ理解できれば、数学の知識は要らないように書かれているのである。学生にとってはグラフも数学なので、「このテキストは数学を用いずに書かれています」とかいうのは説明に偽りありなのだが、ともかく経済数学 I の知識がなくてもミクロ経済学 I を理解する上で問題は生じない。

理由の2つめは、先に述べたように、経済数学のテキストの方でミクロ経済学やマクロ経済学の基礎知識を用いた解説がなされていることが多いということである。筆者が用いている竹之内(2009)でも、例えば1変数関数の微分の応用として費用曲線の関係の導出が出てくるし、陰関数の微分では無差別曲線や等量曲線の限界代替率が出てくる。偏微分の応用には、生産関数や効用関数としてコブ・ダグラス型関数が用いられる。そのような経済学の応用例を解説する場合、初學者の学生には費用曲線や無差別曲線等を説明しなければならぬ。それに相当の時間を割かれてしまうので、肝心の数学の修練が相当に制限されてしまう。逆にミクロ経済学 I を先に履修していればそれらの解説はほとんど要らず、その分を経済数学の解説に回せるので授業時間を効率的に使うことができる。

どの程度効率的になるかを費用曲線のケースで示したい。入門レベルのミクロ経済学のテキストでは、まず生産関数という生産技術の解説をした後に総費用曲線が図1の実線のようになるという説明がある。この箇所は、生産関数の話題から S 字型の総費用曲線を説得的に導出するのは難しいところであり、授業をする上で多くの工夫が必要な場面の1つである。なぜなら、生産量の増加にしたがって、規模に関して収

穫通増から収穫通減に変化することを初学者の新生入生に説得力のある形で説明するには、現実の生産現場の事例をそれほど知悉している訳ではない学生に対してそれらしい事例を幾つも用意しなければならないからである<sup>3)</sup>。さらに、生産関数を用いた利潤最大化からは生産要素需要の最適条件が導出され、直接的には供給曲線が導出されない数理論理的構造になっている点も授業の解説では難しさがともなう場面である。消費決定の理論の方では予算制約化での効用最大化から個別需要曲線が出てくるのであるが、企業の理論では家計の理論の効用関数に対応する生産関数を用いた利潤最大化からではなく費用曲線の議論からでないと個別供給曲線が導出されないのという非対称的論理構造は、学生の理解を妨げる要因の1つであると思われる。その点はともかくとして、次の段階に進むことにしよう。

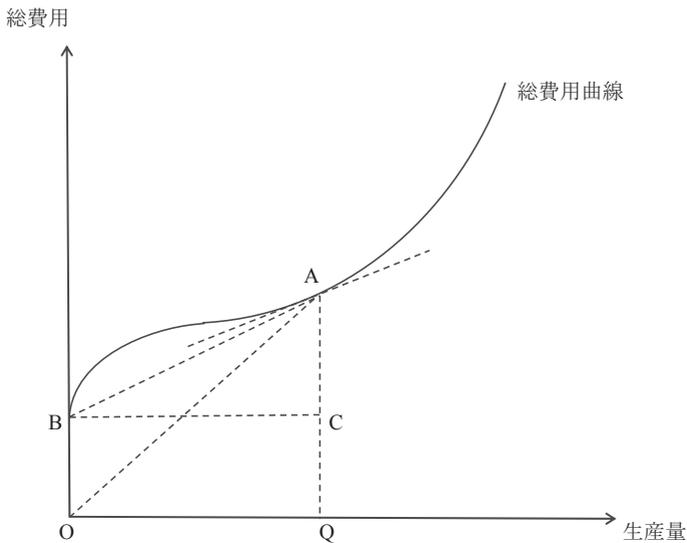


図 1

3) ただし、与えられた知識を覚えることが勉強であるという考えの強い新生入生の場合、しかもスマホを通じたネットによる短文での意思疎通にのみ精通している学生の場合、合理的説明抜きで「これが公式だ」という形での授業が歓迎され、無批判にそのまま覚えようとする。しかし、「それがなぜそうなるのか」を意識させようとする、幾つもの意味で難度が格段に高まってしまうようである。学問において「なぜ」を問うことがなければもはや学問ではなくなるし、就職活動でも社会に出た後にも困ると思うのだが。

図 1 の総費用曲線から、平均費用曲線、平均可変費用曲線及び限界費用曲線を導くことが企業の個別供給曲線を導出する基礎になる。総費用曲線の解説の難しさはともかくとして、総費用曲線が与えられれば、解析的手法を用いずに図解によって 3 つの費用曲線が導出される。生産量が  $Q$  のときに、定義より平均費用は図解的には  $QA/OQ$  であり、平均可変費用は  $AC/BC$  であり、限界費用は点 A における総費用曲線の接線の傾きである。そのことから、よく知られた 3 つの費用曲線の関係が図 2 のように導かれる。特に、限界費用曲線が平均可変費用曲線と平均費用曲線の最小点を左下から右上に通過するという位置関係が重要である。

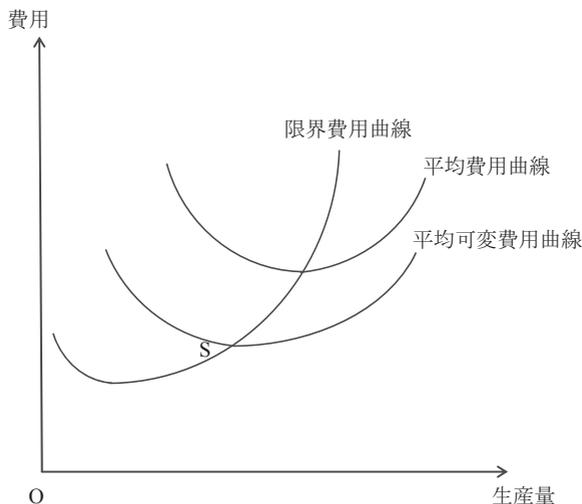


図 2

解析的手法を用いずに総費用曲線の形と 3 つの費用曲線の関係を解説するには、通例授業時間 1 コマ分程度を要する。それに対して、生産量を  $x$ 、総費用を表す費用関数を  $c(x)$  とし、 $c'(x) > 0$ 、 $c''(x) > 0$  を想定して微分を用いれば、解説時間は飛躍的に縮減する。まず平均費用の最小点の条件を求めるために、平均費用を  $x$  で微分して次式を導出し、

$$\left(\frac{c(x)}{x}\right)' = \frac{xc'(x) - c(x)}{x^2}$$

この値が 0 になるとすれば,

$$\frac{c(x)}{x} = c'(x)$$

が得られる。これは平均費用曲線の最小点を限界費用曲線が通ることを意味している。同様に、固定費用を  $c_0$  として同じ手順を繰り返せば,

$$\left( \frac{c(x) - c_0}{x} \right)' = \frac{xc'(x) - c(x) + c_0}{x^2}$$

より,

$$\frac{c(x) - c_0}{x} = c'(x)$$

が導かれる。これは、平均可変費用曲線の最小点を限界費用曲線が通るということである。このようにして、ごく短時間で図 2 の関係が導かれる。しかも、授業をした経験から言うと、高校数学の初歩的な微分を覚えている学生にとっては、こちらの解説の方がはるかに分かり易いようである<sup>4)</sup>。だが、もし学生が費用曲線について知らなければ、費用曲線とは何かという解説に、まず多くの時間を割かねばならないのである。

図 2 の曲線群の相互の間の様斬な関係等の解説が終わった後に、競争企業の利潤最大化条件である（価格＝限界費用）を導かなければならない。微分を用いないとミクロ経済学 I ではこれにも相当の時間がかかるが、経済数学 I であれば利潤である

$$px - c(x)$$

の極値を求めるために微分して 0 とおけばよいので、

$$p = c'(x)$$

---

4) もちろん、数学が苦手な高校数学の知識も忘れてしまっている学生にとっては、どちらの解説も理解するにはかなりの努力が必要である。

はほぼ瞬時に導出される。どちらの方法によるにしろ、さらに大域的条件である操業停止点を説明（これは数学を用いても簡単にはならない）して、点 S より右上の限界費用曲線が企業の供給曲線になるという目的地に辿り着くのである。

このような関係が他にも多くある。例えば、需要の価格弾力性と買い手の支出額との関係、いわゆる新古典派経済学の第 1 公準と呼ばれる限界生産力と実質要素価格が等しくなる条件、独占企業の利潤最大化条件等々、すべてマイクロ経済学 I を履修していなければ長い解説を要する<sup>5)</sup>。そのため、経済数学 I を学ぶ上でマイクロ経済学 I の知識が役立つという効果の方が大きいのである。マイクロ経済学 I を学ぶのに数学が絶対不可欠ということであればこの関係は逆転するであろうが、入門的テキストが数学を用いずに書かれるようになって、先にも述べた（数学を使わない基礎経済学 → 基礎的経済数学 → 数学も使う高次の経済学）という順序がより現実的になっているのである。

#### 4. 見かけ上の相乗作用

いま説明したように、マイクロ経済学 I が経済数学 I の理解を容易にする効果はあるのだが、逆の効果も同時に持つかのように誤解されている問題がある。それは、需要曲線と供給曲線を具体的な関数で与えて均衡価格や余剰の大きさの数値を求めさせるような類の問題である。総費用関数を 3 次関数等で特定化して平均費用曲線や限界費用曲線を求めさせる問題もこの種のものである。そのような問題を練習問題や例題に採用しているマイクロ経済学あるいは経済数学のテキストもよくあるし、公務員試験問題等でもよく出題される。

例えば、最近のマイクロ経済学の入門的テキストで定番のように取り上げられている個別物品税のケースを考えてみよう。図 3 にあるように、需要曲線が AD、供給曲線が FS の市場に対して BC だけの従量税が課されたとすると、課税後の消費者余剰は  $\triangle ABH$ 、生産者余剰は  $\triangle CFG$ 、税収は  $\square BCGH$  となり、これらの和である台形 AFGH が社会的余剰ということになる。そして、この課税による死荷重は  $\triangle EHG$  である。この問題は、経済厚生を余剰の大きさに測る余剰分析としても課税の均衡に与える効

---

5) 無限等比数列では信用乗数、資産収益の割引現在価値及びローンの返済額決定式が例題として出てくる。これらの理解には金融の基礎知識を必要とするので、少なくとも 1 コマ分程度はその解説だけで終わってしまう。

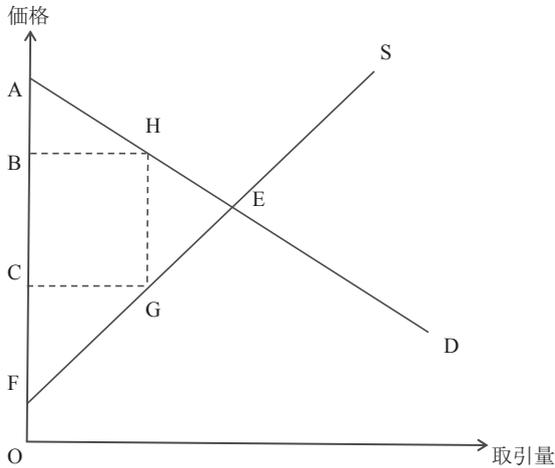


図 3

果を分析する比較静学の問題としても、ミクロ経済学では重要な位置を占めている。ミクロ経済学の教育として本質的に重要なことは、消費者余剰、生産者余剰及び死荷重がどのようなものかを理解することであり、その上で図3のなかでのそれぞれの位置を正しく示せるようになることにある。その上で、需要と供給の価格弾力性が大きなほど同額の課税に対する死荷重が大きくなるという法則性まで理解できれば、部分均衡分析をかなり高度な段階まで学習したことになる。

ミクロ経済学の本質的理解を助けるという意味では、需要曲線や供給曲線を特定化して、消費者余剰とか死荷重とかの具体的値を求めることはあまり意味のない作業になる。なぜなら、さほど高度でもない計算にばかり時間とエネルギーを取られてしまう上に、経済学とはどういう学問なのかについて誤解してしまう危険性も高いからである。例えば価格を  $p$ 、取引量を  $x$  として、

$$\text{需要曲線 } p = 300 - x$$

$$\text{供給曲線 } p = 60 + x$$

という市場に50の従量税が課された場合と、

$$\text{需要曲線 } p = 240 - 2x$$

$$\text{供給曲線 } p = 90 + 0.5x$$

という市場に同じ従量税が課されたときの余剰や死荷重を求めて比較せよ、といった問題があったとする。この問題を解く際に、消費者余剰や生産余剰、税金や死荷重の図形上の位置を自分で判断しなければならないのであれば、マイクロ経済学の理解に役立つ。しかし、テキストの本文での解説を見ればそれらの図形上での位置が分かるという状況で解くのであれば、問題は単に連立方程式を解いて三角形や四角形の面積を求めるという中学の初頭レベルの数学の応用問題（しかも、求める個所の多い面倒な問題）に過ぎなくなる。学生にとっては作業の大部分を計算が占めるため、マイクロ経済学の本質的部分の理解を深めることにはほとんど寄与しない。たとえ図形上の位置関係を覚えるのに役立ったとしても、マイクロ経済学のロジックを理解するという最も重要な目的にとってはむしろネガティブな効果の方が大きくなる危険性が高い。また、弾力性と死荷重の関係についても同じことが言える。弾力性の計算に慣れていないとコツが必要であるし、均衡点等の計算をした後にするのだから、労力としても大きい。しかも、数値例で法則性を確かめることは証明とは異なるので、学生が例題と証明を混同しないように、教える側としては注意が必要である。

同様の議論は、費用関数を特定化する問題に関しても成り立つ。固定費用のある総費用曲線を 3 次関数で特定化すると、平均費用曲線は分数関数になる。そのため、平均費用の最小点を求める作業では解の値が大きき 3 次方程式を解かなければならなくなり、かなり面倒な計算をすることになる<sup>6)</sup>。学生は煩雑な計算をスピーディーにできる方法を模索しがちであり、そのために経済学のロジックを無視した解法を模索しがちである。これは、本末転倒である。3 次関数以外であっても、どのような関数で特定化するにしろ、前節で紹介したように平均費用曲線と平均可変費用曲線及び限界費用曲線の位置関係は一般的に判明していることなので、関数を特定化したことで新たに分かることは経済学的には何もないというのが事実である。

---

6) もちろん、それは数学の訓練としては意味を持つ。竹ノ内（2009）の P.72にある例題3.6は、解き方が p.73に書かれているのだが、それを自力でフォローするのは学生にとって容易ではないようである。計算過程を丁寧に解説するとかなりの時間を費やすことになる。その例題に対応する練習問題は2次関数での特定化なので、はるかに計算は容易である。

数値例の練習問題は数学の訓練という意味では重要である。数式操作は文法が厳密な言語による作文のようなもので、修得には繰り返しの訓練が欠かせないからである。しかし、経済学のロジックを学ぶ上では、それが経済学だという誤解を招きかねないこともあって、良い問題とは言い難い点が多い。経済学をきちんと学んだ上で、公務員試験対策等のために必要な学生がそのような問題をこなすというのが順序としては良いであろう。

## 5. 苦手なのは数学なのか算術なのか

次に、実際の経済数学 I の授業でポイントになっている点についていくつか考察してみたい。その 1 つは、数値計算能力である。具体的には小数計算、分数計算、桁数が大きく 0 が多数つく計算である。試験をしてみると、小数や分数の計算間違いが多く見かけられる。しかも、間違い方に共通の傾向が見られるものもある。そのような計算ミスをする学生が数学の苦手な学生なのかというと、必ずしもそうではない。微分や偏微分の問題は完全にこなしているのに、小数の計算を間違うという例は結構あるのである。

小学校の算数では自然数についての四則演算のルールを学習した後に小数から分数へと進むので、分数の計算はできるのに小数の計算を間違うことは不思議だと思われるかもしれない。しかし、近年では小数の割り算や小数第 2 位を使う計算が出てくると、正解率が極端に悪くなる傾向がある。割り算においては、小数点の移動の方向が逆になるというのが、多くの答案に共通して見られる間違いである。

例を挙げて説明しよう。竹之内 (2009) の p.20 では連立方程式の解が 1 次関数のグラフである 2 直線の交点となっていることを用いる応用問題として、「損益分岐点比率」の例題が説明されている。損益分岐点比率は経営学の分野の用語であり、ミクロ経済学の損益分岐点とは異なる。収入と総費用が一致する販売量の総販売量に対する比率であり、これが低いほど利益が大きくなるというものである。その問題は、「販売価格 1 台 10 万円のパソコンを 1000 台造って 1000 台売った。固定費は 4500 万円、1 台あたりの変動費は 5 万円であるとするとき、損益分岐点比率はいくらか。」というようなものである<sup>7)</sup>。1 台あたりの変動費とはミクロ経済学でいえば平均可変費用で

7) 以下で説明することに合わせるために、実際の例題より固定費と販売量を 10 倍に大きくしている。

あり、それが5万円で一定（限界費用としても同じ）ということである。販売台数を  $x$  として万の単位で数字を記すことにすれば、

$$\text{総費用 } y = 4500 + 5x$$

$$\text{取 入 } y = 10x$$

を連立させて解けば損益分岐点の販売台数が  $x=900$  と求められる。1000台に対する比率なので損益分岐点比率は90%ということになる。この段階では、パーセントの値の求め方を忘れてしまっているごく少数の学生を除いて、間違いはほぼない。

この例題の応用として、「費用構造と価格を同じとして損益分岐点比率を75%にするには販売目標を何台にすればよか」というようなパターンの問題がある。これは、

$$900 \div 0.75 = 90000 \div 75 = 1200$$

と解く問題なので、使う知識は小学校の算数である。しかし、このパターンになると正解率が目立って下がるのである。この問題を採点しても、あまり共通の計算ミスの法則が見つかる訳ではない。むしろ、単純に小数第2位の割り算のルールを知らないか忘れてしまっている（実生活では、計算が必要であればスマホの電卓を使っているのであろう）のかなという感じである。それが、費用構造と価格を同じとして損益分岐点比率を60%にするには販売目標を何台にすればよか」となると、同じパターンの間違いが多く出てくる。これを

$$900 \div 0.6 = 90 \div 6 = 15$$

としてしまうパターンである。販売目標が900を下回ることはないはずなのに、このような解答を堂々と書かれているとちょっとたじろがざるをえない。今風に言えば「ドンビキ」である。さすがに答えが小さ過ぎると思うのか、消しゴムで消したままの答案もある。間違いの要因は、割り算なのに掛け算のときの小数点の移動をしている点にある。まったくの出鱈目な間違いではないのである。小学生のときに身に付けるべき計算ルールを正しく記憶していないのである。

このパターンの間違いがかなり学生に共通に見られるのは、いわゆる「ゆとり教育」で小数の計算が第 1 位に限定されて教えられてきたことによる面が大きいであろう<sup>8)</sup>。だが、それよりも割合というものの感覚が無いという方に、より大きな危機感を感じる。割合の感覚があれば、15の60%が900ではないことに気づくはずだからである。その意味では、消しゴムで消してある答案には見所があると言える。しかし、小数の計算ルールだけでなく割合の感覚が欠如していると、経済で重要な利子率の計算ができないし、金融の基本が理解できないことになる。

これと同じ間違いは、数列の計算でも見られる。無限等比数列の和を求める応用問題として信用乗数がある。テキストでは準備率が10%の例を紹介して、通貨供給は最初の現金増加額の10倍も増えることが解説されている。この準備率を5%にして、最初の現金増加額を1000億円としてみると、

$$1000 \div 0.05 = 10 \div 5 = 2$$

という間違いになる。信用創造とは何かを理解していないと最初の現金増加額よりはるかに大きくならなければならないことも判断できないので、間違っているとさえ思わない学生も見られる。もちろん、この問題の前に信用創造について説明しているのはあるが、

無限等比数列の個所で竹ノ内（2009）は、極めて実用性の高いローン返済額の計算公式を紹介している。いま  $A$  円を利子率  $r$  の複利で借りて  $n$  年で均等返済するときの 1 年当たりの返済額を  $x$  とすると、無限等比数列の和の公式を用いれば、

$$x = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} A$$

という式が導かれる。少し前に、 $A$  を120万円、 $r$  を4%、 $n=10$ 、 $1.04^{10}=1.48$ として  $x$  を求めよという問題を出題したことがある。問題を解く際には公式が分かるようになっているので、単に

---

8) これは教育課程の問題だけではない。いまの小学校や中学校で、小数の割り算をはじめとして、割合をきちんと理解して解説できる教員がどれほどいるのであろうか。教えられる先生が少ないのであれば、児童や生徒を批判してもしようがないし、教育内容を変えても効果が出るかどうか疑問である。

$$x = \frac{0.04 \times 1.48}{1.48 - 1} \times 120 = \frac{1.48}{12} \times 120 = 14.8 \text{ 万円}$$

という計算をすればよいだけである。出題者としてはいわゆるサービス問題のつもりだったのだが、正解率はこの問題の利子率程度であった。どうも小数が分数のなかに入っているような計算になると、四則演算の順序も怪しくなる学生が多いようなのである。

無限等比数列に関して言うと、有名進学校の理系クラス出身で経済学部に来たのは数学だけは自信があったのでという学生から、次のような質問を受けたことがある。

「3分の1に3をかければ1になるのに、0.333…に3をかけても0.999…にしかならないので、小数って概数ですよね」というものである。これは明らかな誤解で、無限等比数列の和の公式を用いて

$$0.999 \dots = 0.9 \times (1 + 0.1 + 0.1^2 + 0.1^3 + \dots) = 0.9 \times \frac{1}{1 - 0.1} = 1$$

というように循環小数の値の求め方に気付かなかっただけである。筆者の世代は小学校の算数の教科書に循環小数を分数に変換する方法が書いてあり、それが無限等比数列の和の公式から来ていることを高校で学んだ。小学校では、循環する部分の桁数と同じ数だけ分母に9を書いて、分子に循環する部分を書き、必要なら約分すればよいと習った。例えば、

$$0.342342342 \dots = \frac{342}{999} = \frac{38}{111}$$

といった具合である。なぜ小学校にこのような内容があったのか定かではないが、おそらく循環小数が有限の桁数の小数と同じく有理数であることを理解させるためだったのだと思う。今はこの解説がないので、有理数と無理数の違いを学生が正確に理解しているかどうかについても、やや疑問がある。ただ、小学生に教えるには内容的に高度過ぎると思われるのも確かではある。だが、高校数学で無限小の概念を用いる微分を学ぶのであれば、無限等比数列の和についても同じ段階で学ぶべきなのではないだろうか。

ところで、高校で理系コースにいて数Ⅲまで学習したという学生にとって、経済数

学 I の内容のうち多変数関数の微分に入るまでは復習という意味合いが強い。理系コースだった学生は数学が得意であることが多いため、学習した内容をよく覚えてもいる<sup>9)</sup>。そのために安易に考えてしまうのか、試験の結果が思ったほどよくないという例も少なくない。自分ではできると思ったのに納得できないと筆者に不平を述べた学生もかなりいるし、数学に自信を持っていたのに単位が修得できなかったという学生も、なかにはいる。これは、ひょっとすると経済数学 I 独特のことなのかも知れない。

これまで小数計算の問題点を述べてきたが、分数の計算でも問題が起きることがある。経済学における数学の応用は微分が多いので微分を中心に教えることになるが、そうすると指数の計算が重要になる。指数法則を理解するだけでなく、指数が分数や小数のときの計算を正確にしないと正解に辿り着けない。この場合の間違いは、符号の取り違えということが多い。

その例を示す前に、少し回り道になるが、経済数学 I での微分の解説の順序を説明しておく。竹ノ内 (2009) では高校の数学のテキストと同様の微分の定義を説明した後、以下の公式が、平易な証明とともに立て続けに紹介される。

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$\{cf(x)\}' = cf'(x)$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$$

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$$

この次の章で指数関数と対数関数の微分を学ぶので<sup>10)</sup>、いわゆる数 II で微分の初歩の

- 
- 9) どの科目でもそうだが、得意でなかったり興味を持てなかったりした科目については、たとえ試験前に覚えたとしても、忘れてしまうものである。数学や算数があり得意でなかった学生が四則演算のルールの一部を忘れたとしても、何の不思議もないである。
- 10) 経済学では三角関数の微分を用いることがほとんどないので、具体的関数形として微分法が紹介されるのは、 $x^a$  ( $a$  は実数全体)、分数関数、指数関数及び対数関数ですべてとなる。

みを学習してきただけという本学の大半の学生にとって、非常に早い展開で数Ⅲの高度な段階の合成関数の微分まで進んでしまうことになる。しかも、計算が煩瑣な分数関数の微分が入ってくるだけでなく、すべての実数  $a$  に関して、

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

が成り立つということも学ぶ。もちろん、これが理解されるためには、元来は自然数であった累乗を表す指数が無理数を含む実数全体に拡張されることを理解する必要がある。

この状況で、例えば

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

を微分せよという問題を解くとする。それには分数関数の微分の公式を用いる方法と、 $(x^a)'$  の公式を用いる方法の 2 つの解き方がある。一般的に分数関数の微分の公式を用いると計算が厄介になる。この場合、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

というように計算することになる。慣れた人には容易に見えるであろうが、初学者の学生にとっては、途中で間違え易い個所が複数あって大変である。他方、 $(x^a)'$  の場合は、

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

という計算になり、はるかに単純な操作になる。最後のルート関数表記への変換がちょっと考えさせられる程度である。そのため、この手法を好む学生が多いのだが、なかなか正解率が高くないのである。まず多いのは、左から 2 番目の段階で指数部分を

$$-\frac{1}{2} + 1$$

とってしまうパターンである。微分というのは指数を減らしていく操作として覚えているのか、指数が負の場合にも絶対値で小さくすると考えてしまうようである。しかも、符号を取り違えただけでなく、この分数の計算を間違う例もある。この段階で符号を間違えないにしても、指数部分が

$$-\frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

というように正の数になってしまうというパターンの間違いも相当数見られる。その場合、係数についているマイナスの符号もプラスに変えてしまうケースが多いので、微分の操作自体になんらかの誤解があるのかもしれない。

いま紹介したような形の分数関数を経済学の授業で使うことはほとんどないので問題ないのではないか、という疑問を持つ人もいるであろう。しかし、ここで問題になったような指数の計算は、コブ・ダグラス型関数の計算において何度も顔を出してくるのである。一般的なコブ・ダグラス型生産関数  $f(x, y) = Ax^a y^b$  の等量曲線の限界代替率は、

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{ax^{a-1}y^b}{bx^a y^{b-1}} = \frac{ay}{bx}$$

と求められる。最後の約分も意外と間違え易いのだが、それでも一般形での計算の正解率は比較的高い。ところが、例えば  $a=0.6$ ,  $b=0.4$  というように特定化すると、正解率がかなり下がってしまうのである。一般形でできるころが特定化するときなくなるというのは、かなり奇妙な現象である。しかし、より高度な数学よりも数値計算に難点があることを理解すれば、これは何の不思議もないことになる。

そこで、経済数学 I で徹底的に数値計算の復習をさせればよい、という意見が聞こえてきそうである。筆者は、それに躊躇している。なぜなら、そのような課題を与えることは学生にとって侮辱であり、学習意欲を大きく削ぐ危険性が高いからである。学習意欲を低下させない形で基礎知識の欠如を学生に理解させるのは、相当に難しいことである。学生が何らかの資格試験に合格しなければならないという強制的な目標があるのなら別だが、特に達成目標がある訳ではない学生にとって、自分の欠点を論ばれることほど嫌なことはないのである。

そのように考えて、小学校の復習をさせたりする代わりに、問題の解説途中で「こ

の計算は結構間違え易いから」とか言って、小数や分数の計算等々をさりげなく確認する回数を増やすように筆者はしている。それだけでも、毎回授業に出席している学生には効果があるようである。

## 6. 接線の傾きの表現について

経済学での数学の応用の中心は微分なので経済数学 I でも、微分が関数のグラフの接線の傾きを与える導関数を求める操作であることは周知の通りである。接線というとき、微分における接線は円周上の一点に接する直線というものとは異なる。もしそのようなユークリッド幾何学的な接線を考えてしまうと、例えば  $y=x^3$  のグラフにおける原点での接線を考えることが難しくなってしまう。この場合の接線は横軸に等しくなるのだが、通常感覚では交わっている直線である。微分における接線は曲線が直線で限りなく近似できるときの直線のことである。接線をどのように捉えるにしても、ポイントは直線の傾きにある。

ミクロ経済学 I の授業でも、需要曲線と供給曲線の図をふんだんに用いるので、直線の傾きについて幾度となく触れることになる。例えば、同じ点を通る傾きの異なる直線で表された需要曲線が 2 本あるとすると、傾きの緩やかな方が価格弾力性は大きく、逆に傾きが急な方が価格弾力性は小さいといった説明である。

ここで注意しなければならないのは、需要曲線は右下がりの直線なので、傾きが緩やかな方が数学的には傾きが大きく、垂直に近くなるほど傾きは小さくなるという点である。一言でいえば、傾きの大小という言い方は紛らわしいのである。それはもちろん、1 次関数の方程式における傾きが負の数の場合だけである。これが供給曲線だと右上がりの直線になるので、見かけ上の傾きと数学的傾きの大小関係は一致し、紛らわしさはなくなる。だが、ミクロ経済学では双方の曲線が同時に出てくるので、特に数学が得意で負の数の大小関係も間違わない学生にとって、紛らわしくないように表現を注意しなければならない。

筆者は、ミクロ経済学 I では「見かけ上の傾きが緩やか（より水平に近い）」か「見かけ上の傾きが急（より垂直に近い）」といった表現を使い、傾きの大小という表現は用いないことにしている。その理由も、複数回説明するようにしている<sup>11)</sup>。そして、

11) このようなポイントが幾つもあるので、授業では出席をとることはしていないが、答案の記述を見れば授業の出席具合が分かるようになっていく。

この点についてはグラフを多用するような科目の担当者間で、表現を統一した方がよいのではないかと考えている。統一した方がよい点は他にもあると思われる。学生にとって、先生によって使う用語がまちまちでは混乱するだけではないだろうか。

## 7. ノートは単なる記録ではない

さて、最後に今年度の授業で初めて経験したことについて触れておきたい。それは、板書やプロジェクターの映像をスマートフォンで撮影する（写メする）学生が多く見られるようになったことである。前期のマイクロ経済学 I ではそのような行動は見られなかったのだが、後期の経済数学 I ではしばしば見られるようになった。ゼミの学生によると、1年生の多い授業に出たところ、スターの記者会見のようにシャッター音が鳴り響き、先生の説明をろくに聞かずにプロジェクターの映像を写す学生が多いことに驚いたということである。ゼミ生によれば、そのような行為は信じられないものだということである。つまり、スマホを使う世代全体に特有のことではなく、本学の経済学部では今年度の新生から顕在化した現象といつてよいようである<sup>12)</sup>。

この現象を取り上げたのは、ノートを取るという基本的な学習の作業の1つが危機に瀕していると感じ、その意味で授業中の私語よりも問題ではないかと考えさせられたからである。数学は手書きで計算して計算技法等を理解するものなので、筆者はプロジェクターを利用せずに板書している。それを写メで済まされると、板書に関する教員側の努力はほとんど無意味になってしまう。

ノートは単に記録するためのものではなく、授業での解説を理解し重要なポイントを把握するための手段（の1つ）であるから、とりあえず記録しておくという行為は学習成果を確かなものにする上では危険である。授業の後で丁寧に復習するのなら意味があるが、それがあまり期待できないのである。なぜなら、写メをとる理由がノートを取りきれないからということであり、彼らによればノートをとるのだけで精一杯で解説までは聞ききれないことが多いということである。後で板書を見直しても解説を聞いてなければ、復習として意味のあるものにはならないことは明らかである。しかも、多くの学生がノートを見直すのは、あるいはノートの内容を初めて見るのは、

---

12) ただし、ネットの情報等を見ると、首都圏の大学等では既に2年程度前から問題視されていた現象のようであり、それが福岡まで波及してきたということのようである。

試験の直前になってからである。そのとき、解説を覚えていない式の展開を見ても意味がないことは明らかである。

筆者は折に触れて、学生に解説を聞くことを優先し、ノートを取るときには板書されたものから取捨選択してポイントだけを記すようにと注意している。板書の速度にも配慮しているつもりだし、教科書に書いてある式の展開を板書しているだけのものをその場でノートに取る必要はないという指摘もたびたびしている。しかし、そのような指摘も耳に入らずに、板書は必ずすべてノートに写すという姿勢の学生が多い。なので、教師の解説の要点を自分で把握してメモするという、本来のノートという意味の行為は今の学生には望むべくもないのである。

筆者は、既に30年近く前に本学に赴任した時点で、学生のノートの取り方に疑問を感じた。筆者は本学に赴任する前に数年間学習塾でのアルバイトを経験したのだが、そこで主として小学生を対象とした授業のための研修として板書方法を教えられた。その際、研修担当の先生は、「今（当時）の大学の授業は最低なので、それをすべて忘れて」と言って要点を解説し始めた。いわく、ホワイトボードを左右2つに区分けし、左側に通常の解説や練習問題、右側に要点や注意点を書き、そのまま生徒にノートをとらせるように、そのために時間をとって筆記した内容もできるだけ確認するように云々といった内容の研修である。それに自分の経験を加えて板書と解説を工夫し、アルバイトで塾の生徒と交流した体験が、実は筆者の教師としての原点である。その前に、かなり長い期間家庭教師をした経験があるが、やはり複数の生徒を教室で教えるというのはまったく違うことであった。

そのような経験があったのだが、そこで身につけた丁寧過ぎる板書を大学生相手にするというのは却って教育的でなからうと思い、本学に赴任したときには少し大学向きに修正した授業を行った。それでも、板書が丁寧でノートが取り易く分かり易いと評価してくれる学生が多数いた。それ自体は嬉しくもあったのだが、同時に疑問を持った。学生たちは、ノートをとるときに解説の要点を自分から把握しようとしていないのではないか、という疑問である。

小学生のうちから筆者が学習塾で学んだような丁寧な板書の授業を高校まで受けてくると、自分で要点を見出そうという大学での勉学で最も重要な姿勢が育まれないのも無理ないのだと気づかされたのである。学生は板書を記録することにのみ集中し、その目的が何なのかを忘れてしまっているのではないだろうか。すなわち、授業は学生と教師の協同作業であり、学生は教師の板書を記録する機械としてではなく、お互

いに考えながら真理に近づこうとする人間としての参加者であるということである。

この点について何とか改善できないかということを経験のように考えさせられながら、良いアイデアも浮かばずに今日まで来てしまったのだが、写メが普通という現象が現れたことによりついに究極の事態が到来したという印象である<sup>13)</sup>。写メで記録して済むのであれば授業に出る必要はないし、他人のノートのコピーを見るのと大差ない。ましてや誰かの写メをラインで提供してもらって済ませようという学生に至っては、論評のしようもないと言わざるを得ない。

もちろん、まじめに利用しようという学生がいないわけではない。だが、そんな利用の仕方でも問題があると感じさせられたことがある。数学の授業なので、たまに変数の書き落としのような板書のミスをしてしまうことがある。そんなときには、その場で指摘してくれる学生がいると助かる。そういう学生は減多にいないのだが、多くのケースでノートを片手に授業終了後に質問してくる学生がいてミスに気づかされる。一生懸命に板書を書き写したノートを基にしての質問には何の問題も感じないが、これがスマホの画面を見せながらとなると、まったく印象が違ってくる。指先で画面の映像を拡大しながら「ここの計算が違うような気がするんですけど」と言われると、理由を単純に説明するのは難しいのだが、極めて不愉快になるのである。学生がスマホで写すだけという作業しかしていないことへの反感かもしれないし、ミスを証拠映像にされたと感じるからかもしれない。いずれにしても、授業で板書するまでの準備のすべてを軽んじられ、努力のすべてを否定された上に軽蔑されているというような印象にまでなってしまうのである。

大人気ないと言われればそれまでかもしれないが、教師も人間であり感情がある。それに、授業は教師と学生の協同作業であるという本質を否定するような行為である写メは、問題である。問題が深刻にならないうちに大学あるいは学部単位で対応を考えておいた方がよいのではないと思わされた体験である。

---

13) スマートフォンは確かに高機能の機器であるが、それを社会が良くなるように使っている人はほとんどいないように思われる。画面を見て周囲に注意を払わなくなると社会モラルが急降下している現象を見ても、今のところデメリットばかりが目立つ感じである。

## 8. 終わりに

これまで、経済数学 I を担当して感じてきた問題点を紹介し、部分的ではあるが原因が解決法について議論してきた。経済数学が基礎的経済学を学ぶ前の基礎知識という学習順序が逆転しているということから始まり、数学というより問題点は数値計算の基礎力や割合を考える感覚にあるということを書いてきた。

そのなかでも示唆してきたように、学生の能力や傾向は年々変化している。この論考で紹介した問題を解く上での様々な現象は、実はその問題に初めて向き合っているものではない。筆者は事前に作成した練習問題のプリントを配布し、それをすべて授業中に解いて説明している。試験に出題する問題は、それらの類題から構成されているものである。にもかかわらず、十分な成果が得られないため、毎年プリントの内容を修正している。それには、筆者が数学の専門家ではないという事情もある。専門家ではないために、いまだに初等数学でも新たに勉強することがある。新しく学んだことを参考にして、よりよい説明や練習問題を工夫するという努力は、当然ながら不可欠である。だが、練習問題を修正する理由には、問題の教育上の有効性が年々変化してしまうという理由もあるのである。

経済数学 I とマイクロ経済学 I を担当してから強く感じるようになったのだが、以前には有効だった説明方法の賞味期限が 3 年も経てば切れてしまうということがしばしばある。学生から分かり易いと評価を得た説明方法に対して、3 年後には分かり難いとか意味が分からないとかの批判を受けることもある。教育とは生身の人間相手の作業なので、特定の方法が常に有効とは限らないのは当然であるとしても、数学のような分野でもその傾向が強いというのは意外でもあるし不思議でもある。経験を経るにしたがって、授業の難しさを感じているというのが偽らざる実感である。

雑感のようなまとまりのない論考ではあるが、同僚の諸先生方や同じような経験をされている方々に多少なりとも参考になれば幸いである。今後また参考になりそうな現象に気付いた際には、学生が誤解する傾向と原因を明確にしたうえで報告したいと考えている。

### 参考テキスト

- 赤木博文 (2008) 『コンパクトミクロ経済学』 新世社.  
安藤至大 (2013) 『ミクロ経済学の第一歩』 有斐閣.  
井堀利宏 (1996) 『入門ミクロ経済学』 新世社.  
金谷貞夫・吉田真理子 (1999) 『グラフィックミクロ経済学』 新世社.  
金谷貞夫・吉田真理子 (2008) 『グラフィックミクロ経済学：第2版』 新世社.  
神戸伸輔・實田康弘・濱田弘潤 (2006) 『ミクロ経済学をつかむ』 有斐閣.  
川西諭 (2010) 『経済学で使う微分入門』 新世社.  
清野一治 (2006) 『ミクロ経済学入門』 日本評論社.  
水野勝之 (2004a) 『テキスト経済数学—入門編：第2版』 中央経済社.  
水野勝之 (2004b) 『テキスト経済数学：第2版』 中央経済社.  
西村和雄 (2001) 『ミクロ経済学：第2版』 岩波書店.  
岡部恒治・有田八州穂・今野和弘 (2004) 『文系学生のための経済教室：1から思い出そう』 有斐閣.  
塩沢修平・北条陽子 (2010) 『基礎から学ぶミクロ経済学』 新世社.  
竹之内脩 (1998) 『経済・経営系数学概説』 新世社.  
竹之内脩 (2009) 『経済・経営系数学概説：第2版』 新世社.  
柳川隆・町野和夫・吉野一郎 (2008) 『ミクロ経済学・入門』 有斐閣.