

1相2元非対称データに対する未観測値を含む主成分分析の適用

— ブランドスイッチング行列の分析 —

橋 本 翔

1. はじめに

商学や経営学で取り扱うデータには多相(Multi Way)かつ多元(Multi Mode)であるデータを分析する場面がある。相(Way)とは、データを構成する対象の種類のことである。例えば、社会科学におけるアンケート調査であれば多くの場合「回答者×回答項目」という形のデータ行列をとるが、この場合は「回答者」と「回答項目」という2つの相を持つデータとなっている。また、例えば相関行列をデータとする場合には、相関行列は「回答項目×回答項目」という形式を持つため、1相のデータということになる。一方、元(Mode)とは、相を組み合わせた数を示したものである。例えば、「回答者×回答項目」で成り立つデータの場合は「回答者×回答項目」を組み合わせているので2元、相関行列も「回答項目×回答項目」なので2元のデータである。多相かつ多元であるデータの例としては、前述の個人や企業を調査対象として複数の項目を調べた調査データは「対象×項目」の2相2元データであり、その調査を複数の時点で行っていれば「対象×項目×時点」の3相3元データである。また、例えばブランドスイッチングデータのような複数の対象間の関係性を複数時点で計測したデータは「対象×対象×時点」の2相3元データである。このように、多相多元のデータは社会科学において分析対象として広く用いられている。

1相2元のデータを分析するものとして、多次元尺度構成法(MultiDimensional Scaling)が存在している。これは対象間の非類似度(距離)がデータとして与えられたときに、その関係性を低次元(一般的には

2次元)の特徴量として表現する手法である。いわば、対象間の距離データをもとに、距離の公理を保つように2次元空間での付置を作成する手法である。実際、しばしば、実在の都市間の距離をもとに地図上の付置を再生可能であることをデモンストレーションとして示すことが多い。

多次元尺度構成法が対象としているデータは1相2元のデータであるが、分析対象となる1相2元データはしばしば距離の公理を満たしていない場合がある。例えば、前述したブランドスイッチングデータの場合には、対象A→対象Bのスイッチング数とB→Aのスイッチング数は一般に異なっている。

このような非対称な1相2元データを分析する手法としては、非対称多次元尺度法(非対称MDS)の手法が存在している。非対称MDSのもとでは、対称データの多次元尺度法(対称MDS)が対称な非類似度(距離)データに基づいて低次元空間上にそれぞれの分析対象を付置するのと同様に、非対称データに基づいて「低次元の実距離空間、複素距離空間(complex metric space)、あるいは実非対称距離空間(real asymmetric metric space)内に対象を表す点を埋め込む方法」(千野・佐部利・岡田, 2012)である。

非対称MDSには大きく分けて2種類の方法が存在している。一つはデータである非対称行列を対称部と非対称部に分離し、その後分析する手法である。この手法として代表的なものはOkada-Imaizumi(1987)モデルであり、そのモデルでは対象間の非類似度の非対称性は対象ごとに影響力を表す円を用いて表現される。そのほかにも、スライドベクトルモデル(Zielman and Heiser, 1993)や風モデル(Tobler, 1976)などが存在している。上述したモデルやその他のモデル、分析対象にするデータ例、分析結果の解釈方法に関しては千野・佐部利・岡田(2012)に詳しい。

もう一つの方針としては、非対称性のあるデータを対称部と非対称部に分離することなく分析する手法である。その一例としてOkada & Tsurumi(2012, 2020)では、ブランドスイッチング行列に対して特異値分解を用いた分析法が提案されている。一般的にはブランドスイッチング行列はブランド×ブランドの正方行列の形式をとっているが、これを特異値分

解することにより、データを十分に説明できるより少数の成分の特徴量で各ブランドの流出入を表現する。これにより、各ブランドの各次元における外向傾向（他ブランドへと流出する傾向の強さ）と内向傾向（他ブランドから受け入れる傾向の強さ）を明らかにするというものである。

後者の非対称データをそのまま分析するという試みは、特にブランドスイッチングデータのような、外向傾向と内向傾向にそれぞれ異なった特徴がある場合に有用であると考えられる。また、各次元に強い特徴量を持つブランドを取り出すことで、各次元がそれぞれブランドスイッチングのどの特徴を説明しているかをうかがい知れる。

しかしながら、1相2元非対称行列の特異値分解によるOkada & Tsurumi(2012, 2018)の分析には、完全なるブランドスイッチング行列が必要とされるが、ここには2つの問題点がある。第一には、しばしばブランドスイッチング行列の対角要素は観測されていないことがある。ブランドスイッチングの観測では、ブランドスイッチングの頻度が観測されることはあっても、同一ブランドを継続的に購入した件数の観測は行われなことがあり、対角要素は観測されていないためブランドスイッチング行列は未観測データを含むデータ行列となる。この場合、単純な特異値分解による手法は利用することができない。ブランドスイッチングの他にもこのように非対角要素が観測できないデータは存在しており、例えば国家間の輸出入金額などがそれにあたる。

2つ目の問題は、ブランドスイッチング行列の対角要素と非対角要素を同一の特徴で説明しようとする点である。これは、異なるブランドへのブランドスイッチングの特徴を説明するために、同一ブランドの継続購入も同一の特徴で説明できるものとして分析してしまう問題である。このことは、ブランドロイヤリティなどのブランドを継続購入する要因と、他ブランドからの流入の要因とを区別することなく分析してしまうことにより、得られた結果の解釈が困難なものにしてしまう。

これらの問題の解決のために、本研究では非対角要素のみを分析対象とし次元縮約を行うアルゴリズムを提案する。具体的には、欠損値を伴うデ

ータの主成分分析の手法を利用し、対角要素を未観測データとして取り扱って推定を行う。それにより、実際のブランドスイッチングの件数のみを対象とした分析を行う。

本論文の構成は以下のとおりである。次の2章では本論文で提案するモデルを説明し、その最適化手法を示す。その後第3章で提案手法の実際のデータに対する適用例を示す。最後に第4章で全体のまとめと考察を行う。

2. 提案モデル

本論文で提案するモデルは、Okada & Tsurumi(2012)で提案されているモデルの拡張である。そのため、まず初めにOkada & Tsurumiのモデルを紹介する。Okada & Tsurumiのモデルは、ブランドスイッチング行列を特異値分解によって分解するものである。ここで、 n ブランド $\times n$ ブランドのブランドスイッチング行列を A で表す。ブランドスイッチング行列 A の (i, j) 要素である a_{ij} はブランド i からブランド j への遷移の件数を示している。Okada & Tsurumi(2012)では特異値分解を用いて A を次のように分解する。

$$A = XDY'$$

ここで左特異行列 X は n ブランド $\times n$ 次元の行列で、ブランドごとの外向傾向（他ブランドへと遷移する際の傾向）を表しており、右特異行列 Y は n ブランド $\times n$ 次元の行列であり内向傾向（他ブランドから流入する際の傾向）を表現している。そして D は対角成分に行列 A の特異値が降順に並んだ対角行列であり、特異値 d_{ii} の特異値の合計 $\sum d_{jj}$ で除した値 $d_{ii}/\sum d_{jj}$ は各次元のデータ全体に対する重要度を示している。なお、

$$X'X = Y'Y = I_p$$

である。また、ここで I_p は p 次元の単位行列である。

同モデルは、以下の最小二乗基準を最小にしたものだと考えることができる。(Ten Berge, 1993)

$$\|A - XDY\|^2$$

これは、仮に次元数 p を $p < m$ に固定した時には、ブランドスイッチング行列の情報を最適な p 次元の情報に圧縮したものであるとみなせることである。

またここで、 $XD = P$ とおいた、

$$\|A - PY\|^2$$

はPが主成分得点であり、Yが主成分負荷量である主成分分析（軸の回転としての主成分分析）とみなすことができる。

本研究ではOkada & Tsurumiのモデルにおけるデータ行列Aの対角要素によらず、非対角要素のみを分析し次元を求める手法を提案する。具体的には、対角要素が未知であるとみなし、Ilin and Raiko(2010)で述べられている繰り返し処理を用いた最適化を行う。本研究では以下の最小二乗基準を最小化するX, DおよびYを推定する。

$$\|A - XDY' - U\|^2$$

ここで、Uはn行n列の対角行列である。対角行列のみを完全に最適化する変数Uを用いることで、XDY'では非対角要素の最適化を行う。

パラメータX, D, Y, Uの最適化は以下のように反復最小二乗法を用いて行うことができる。

Step1. データ行列Aおよび対角行列Uの初期値を与える。データ行列Aがそもそも対角要素を持っている場合にはその値を用いてもよく、そうでない場合には0や行平均、列平均などを用いても良い。またUの初期解は本論文では $U = \mathbf{0}$ （零行列）とした。

Step2. X, D, Yの最適化を行う。目的関数 $\|A - XDY' - U\|^2 = \|(A - U) - XDY'\|^2$ なので、 $A - U$ を以下のように特異値分解する。

$$A - U = X^*D^*Y^{*'}$$

このとき、Xは左特異行列 X^* の第1列から第p列、Yは右特異行列 Y^* の第1列から第p列、Dは第1特異値から第p特異値までが対角に並んだ対角行列として更新する。

Step3. Uの更新を行う。目的関数は $\|(A - XDY') - U\|^2$ と書けるので、 $U = \text{diag}(A - XDY')$ と更新する。ここで $\text{diag}(M)$ は対角行列Mの対角要素のみを取り出すインジケータである。上述のように定めることで $(A - XDY') - U$ の対角要素は0になるため、目的関数を最小化するUが得られる。

Step4. 収束判定を行う。目的関数の値が収束するか、定められた最大の反復回数に達していれば反復を停止し、そうでなければStep 2およびStep 3を繰り返す。ここでは、収束判断の基準をパラメータの更新による目的関数の変化率が $10^{-8}=0.000001\%$ を下回ったときとし、最大の反復回数は1000000回と定めた。

3. 実データ解析

提案手法を用いた解析例として、Okada & Tsurumi(2012)で紹介されているデータを提案手法で分析し、得られた分析結果を比較する。Okada & Tsurumi(2012)では、表1で示されている12種類(11ブランド+その他)のマーガリンのブランドスイッチング行列を分析対象としている。なお、表1に示されている各ブランドの特徴(メーカー、マーガリンの種類、内容量、ブランドシェア率)は表2に示されている。なお、提案手法による解析はOkada & Tsurumi(2012)との比較のために、次元数は2と定めて解析を行った。また、本研究ではアルゴリズムの実行は統計分析環境R(R Core Team, 2024)を用いた。分析に用いたプログラムについてはAppendixを参照されたい。

表1 12ブランド間のブランドスイッチング

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	O
ブランドA	1096	458	14	12	12	42	65	16	8	27	8	81
ブランドB	312	716	7	5	6	14	52	8	3	27	6	39
ブランドC	39	15	837	59	50	13	10	25	28	10	40	104
ブランドD	32	18	65	739	15	12	10	17	8	9	62	73
ブランドE	25	18	61	15	852	29	6	69	4	16	11	55
ブランドF	64	49	18	18	42	505	10	143	6	54	18	64
ブランドG	118	63	10	6	3	9	462	3	1	7	2	61
ブランドH	31	20	33	17	76	142	4	410	3	34	9	84
ブランドI	8	6	35	7	5	3	0	2	430	4	4	30
ブランドJ	69	87	6	5	18	48	6	28	4	386	11	65
ブランドK	17	14	48	77	26	17	14	19	7	14	330	99
ブランドO*	403	344	134	87	71	84	75	111	50	96	99	1180

*ブランドOはブランドAからブランドKを除いたすべてのブランドを表す。

Okada & Tsurumi(2012)より筆者訳。

表2 ブランドの特徴

ブランド	メーカー*	マーガリンの種類	内容量	ブランドシェア率**
A	1	一般	320g	13.80%
B	2	一般	320g	10.20%
C	3	バター混成ベニバナ油製	180g	9.70%
D	1	バター混成	140g	8.70%
E	2	ベニバナ油製	160g	8.50%
F	2	低カロリー	160g	5.80%
G	4	バター風味	365g	5.90%
H	2	低カロリーのキャノーラ油製	160g	5.60%
I	5	一般	200g	5.50%
J	2	一般	160g	3.50%
K	2	バター混成	140g	3.90%
O	—	—	—	18.90%

*1、2、4のメーカーは大企業であり、3と5のメーカーは小企業。

**マーガリンを1度以上買った5468人の購入者の購入履歴データに基づく。

Okada & Tsurumi(2012)より筆者記。

提案手法における収束の様子を確認するために、まずは反復による目的関数の減少について示す。図1は反復による目的関数値の推移を示したものである。初期に大きく減少し、その後は漸減して言っている様子が見える。

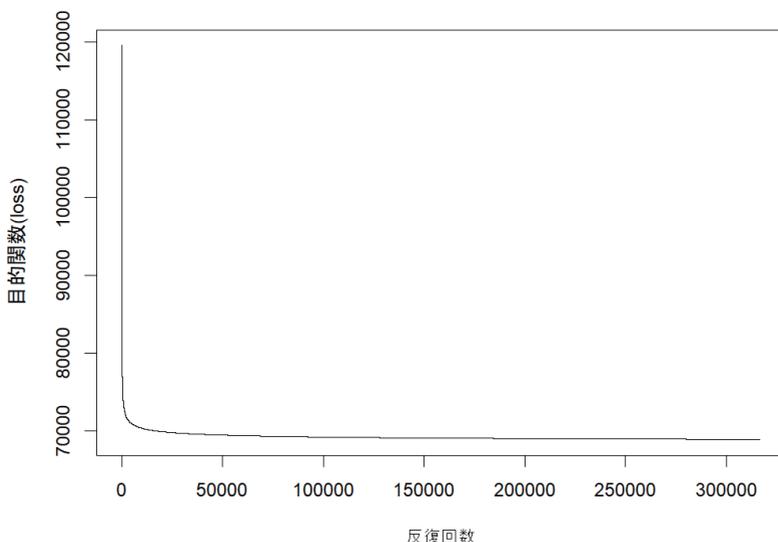


図1 反復による目的関数の推移

次に、提案手法による非対角要素の値の説明率について示す。通常、主成分分析では次元数を p だと定めると行列の第 p 番目の特異値の合計をすべての特異値の合計で除した値が p 次元に圧縮した際の行列全体の情報の説明率になる。しかしながら、提案手法ではデータ行列全体を分析しているわけではないため、上述の方法でデータ全体に対する説明率を示すのは不適當である。そこで、本研究では以下の形で非対角成分に対する説明率を表す。

$$FIT = 1 - \|A - XDY' - U\|^2 / \|A - \text{diag}(A)\|^2$$

第2項は、目的関数の値をデータ行列の非対角要素の2乗和で除した値である。この値はパラメータの推定で U を更新した直後には $A - XDY' - U$ の対角要素は0であるため、データ行列 A の非対角要素の決定係数と解釈することができる。提案手法による FIT の値は0.95と高い値を示し、データの多くの部分が説明されたと解釈することができた。

最後に、Okada & Tsurumi(2012)の手法による分析結果と比較する。表3

および表4は2つの手法による外向傾向Xと内向傾向Yの分析結果を並べて提示したものである。なお、分析結果には次元ごとに符号の不定性がある。つまり、外向傾向を示すXと内向傾向を示すYの各列は、それぞれ対応する列と同時に符号を反転することが可能である。ここで表示している結果は、各列について平均値が正の値になるように適宜符号を反転させている。

表3 外向傾向における比較
(ボールド体は差異が大きい要素)

	提案手法		Okada & Tsurumi(2012)	
A	0.647	-0.433	0.579	-0.588
B	0.391	-0.287	0.335	-0.325
C	0.082	0.318	0.137	0.392
D	0.069	0.240	0.095	0.212
E	0.063	0.255	0.095	0.294
F	0.119	0.304	0.106	0.073
G	0.135	0.002	0.112	-0.046
H	0.088	0.393	0.087	0.128
I	0.022	0.087	0.685	0.472
J	0.125	0.097	0.028	0.050
K	0.064	0.306	0.098	0.010
O	0.594	0.386	0.070	0.120

表4 内向傾向における比較
(ボールド体は差異の大きい要素)

	提案手法		Okada & Tsurumi(2012)	
A	0.701	-0.234	0.632	-0.495
B	0.610	-0.261	0.461	-0.303
C	0.109	0.348	0.143	0.405
D	0.075	0.254	0.094	0.219
E	0.072	0.274	0.097	0.298
F	0.107	0.285	0.099	0.080
G	0.109	0.007	0.098	-0.029
H	0.109	0.386	0.092	0.132
I	0.039	0.089	0.035	0.053
J	0.096	0.173	0.085	0.043
K	0.077	0.227	0.068	0.109
O	0.248	0.545	0.556	0.567

まず表3で示されている推定された外向傾向の特徴について述べる。提案手法と Okada & Tsurumi(2012)は全体的な傾向は同一であるが、いくつかの点で異なっている。表中にボールド体で示している値は、両手法の間での差異が大きい要素である。

これらの違いを次元の解釈という点から述べる。外向傾向と内向傾向のそれぞれについて要素の大きいブランドに注目すると、提案手法における外向傾向は第1列はブランドA、OおよびBが高く、内向傾向の第1列はブランドA、Bが高い値である。このことはこの次元で示している遷移の情報が、ブランドA、O、BからブランドA、Bへの遷移であることを示している。表2で示した各ブランドの特徴とともに考慮すると、この次元はメジャーブランド間の遷移およびマイナーブランドからメジャーブランドへの流入を表現している次元だと考えられる。さらに言えば、流入先であるブランドA、Bはシェア上位の一般的なマーガリンであることから、マーガリンの購入においてマーガリンの特性に大きなこだわり持たずメジャーブラ

ンドを購入する層のブランドスイッチングを表現しているとも考えられる。Okada & Tsurumiの分析結果も同様の解釈が可能であるが、ブランドOについて流出元としてではなく流出先として大きな値をもっている点、ブランドIが流出元として大きな値を持っている点で異なっている。特にブランドIが流出元として大きな値を持っている点については、小企業のブランドであるIから大企業のブランドA,Bへと遷移している傾向を示していることと捉えることで分析に一定の妥当性があるとも考えられるが、表1で示されているデータ行列を確認すると、全体的にブランドスイッチングの頻度が小さいブランドIにこのような大きな遷移の傾向の値が与えられるのは不合理である。このような問題が生じた理由としては対角成分を同時に分析することで、ブランドIの外向傾向が過大に評価されてしまった可能性がある。本手法ではこのような問題を回避することができていることが示された。

同様の問題は次元2についても存在している。提案手法における次元2はブランドHとOが高い外向傾向を持ち、ブランドAとブランドBは負の外向傾向を持っている。そして、内向傾向はブランドO、C、Hが高い外向傾向を有しており、ブランドAとBは負の内向傾向を持っている。また、D、E、J、Kについても内向・外向ともに比較的大きい値をとっており。このことはブランドO、HからはブランドO、C、Hへの遷移が多く、そしてAとBはAとB間で遷移はあるが他のブランドへの遷移が少ない傾向があることを示している。さらに言えば、この次元はブランドスイッチングにおける非大企業ブランド間の遷移を表しており、マーガリンにおけるブランドスイッチングにはメジャーブランド同士で遷移する傾向と、小企業ブランド同士で遷移する傾向があることを示していると解釈することができる。Okada & Tsurumiの分析においてもおおむね同様の解釈ができるが、同分析はよりブランドC、D、E、IからC、D、E、Oへの遷移に注目した次元であるといえるだろう。しかしながら、表1のデータと照らし合わせた時、ブランドスイッチングの件数の多いFやHが十分に説明されていないのは不合理である。これは対角要素をブランドスイッチング件数として分析してしまっていることにより、ブランドスイッチング件数の多い少

数のブランドの重要度が過小評価されてしまった可能性がある。

これらの解釈を再度確認するために、各次元がそれぞれデータのどのような側面の説明を行っているのかを、次元毎に示す。本研究では外向傾向と内向傾向を $A - U = X^*D^*Y^{*'}$ という形で特異値分解を行うことにより推定しているが、これは $X^*D^*Y^{*'} = \sum_j d_j \mathbf{x}_j \mathbf{y}_j'$ という各次元でのデータ表現の和で表すことができる。ここで、 \mathbf{x}_j は外向傾向行列 X の第 j 列を表す列ベクトル、 \mathbf{y}_j は内向傾向行列 Y の第 j 列を表す列ベクトルである。この表現の $d_j \mathbf{x}_j \mathbf{y}_j' (j = 1, \dots, p)$ のそれぞれの j について確認することで各次元の情報が見て取れる。 $j=1, 2$ について示したものが表5、表6である。なお少数点以下の値は四捨五入している。表5および表6からも前述の傾向があることがわかる。

表5 次元1で表現しているデータ

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	O
A	—	415	74	51	49	73	74	74	27	65	53	169
B	288	—	45	31	29	44	45	45	16	40	32	102
C	60	53	—	6	6	9	9	9	3	8	7	21
D	50	44	8	—	5	8	8	8	3	7	6	18
E	46	40	7	5	—	7	7	7	3	6	5	16
F	88	76	14	9	9	—	14	14	5	12	10	31
G	100	87	15	11	10	15	—	16	6	14	11	35
H	65	56	10	7	7	10	10	—	4	9	7	23
I	16	14	2	2	2	2	2	2	—	2	2	6
J	92	80	14	10	9	14	14	14	5	—	10	33
K	47	41	7	5	5	7	7	7	3	6	—	17
O	438	381	68	47	45	67	68	68	25	60	48	—

表6 次元2で表現しているデータ

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	O
A	—	41	-55	-40	-44	-45	-1	-61	-14	-27	-36	-87
B	25	—	-37	-27	-29	-30	-1	-41	-9	-18	-24	-57
C	-27	-30	—	30	32	33	1	45	10	20	27	64
D	-21	-23	31	—	24	25	1	34	8	15	20	48
E	-22	-24	33	24	—	27	1	36	8	16	21	51
F	-26	-29	39	28	31	—	1	43	10	19	25	61
G	0	0	0	0	0	0	—	0	0	0	0	0
H	-34	-38	50	37	40	41	1	—	13	25	33	78
I	-7	-8	11	8	9	9	0	12	—	6	7	17
J	-8	-9	12	9	10	10	0	14	3	—	8	19
K	-26	-29	39	28	31	32	1	43	10	19	—	61
O	-33	-37	49	36	39	40	1	55	13	24	32	—

まとめと考察

本研究では、1相2元の非対称データに対して、その対角成分の最適化を伴わず、非対角成分の最適化を行う低次元の行列を推定する分析手法を提案した。データとしてはブランドスイッチング行列を題材とし、Okada & Tsurumi(2012)の特異分解に基づく解析において対角要素が未観測であるとみなし、未観測データを含む主成分分析における繰り返しを伴う最適化アルゴリズムによって、各ブランドの持つ外向傾向と内向傾向を表現する行列を推定した。分析の結果得られた外向傾向と内向傾向はおおむね解釈可能で妥当な解が得られ、また先行研究の分析結果の持つ不合理な点は提案手法で改善された。

しかしながら、本手法でも問題点が存在している。それは、最適化アルゴリズムに起因する問題である。提案手法で採用した繰り返しの伴う最適

化手法には、実装は容易であるが、収束の速さ、Over fittingになる可能性、そして初期値依存性という点において問題がある。これらはコンピュータの性能向上や複数の初期値を用いることで改善可能であるが、完全に解決できるわけではないことに留意が必要である。ただし、仮にデータ行列が完全に観測されている場合であれば、それを初期値に用いることで先行研究よりも必ず非対角要素への適合が良くなることは保証されている。また、データ行列そのものを特異値分解（主成分分析）した場合と比較した弱点として、解のネスト構造が存在しないという点があげられる。行列の特異値分解は一定の制約のもとで一意に定められるが、本研究は p を定めたもとで反復的に最適化を行うアルゴリズムのため次元数 p の定め方によって異なる解が得られることになる。よって、分析する際に次元数を定めるためにそれぞれ異なった p の値を用いて解析を行ったうえでFITを比較する必要がある、その点で負荷が高くなっている。これらの問題点の改善については今後の研究に期待する。

本研究で提案した手法は、より多相のモデルにも適用可能である。例えば、ブランドスイッチングであれば複数の時点でのブランドスイッチングの件数を観測できることがあるだろう。また、国家間の輸出入や地域間の人口移動などは経年でデータが得られることが一般的であり、これらは非対称な関係性を示すデータで、またしばしばそれらの対角要素は観測されない。これらのように、対象×対象×時点のような2相3元データに対しても提案手法の拡張は容易である。今後は、このような多相データへの適用の拡大が期待される。

参考文献

千野直仁・佐部利真典・岡田謙介 (2012). 非対称MDSの理論と応用. 現代数学社.

Ilin, A., & Raiko, T. (2010). Practical approaches to principal component analysis in the presence of missing values. *The Journal of Machine Learning Research*, 11, 1957-2000.

- Okada, A., & Tsurumi, H. (2012). Asymmetric multidimensional scaling of brand switching among margarine brands. *Behaviormetrika*, 39, 111-126.
- Okada, A., & Imaizumi, T. (1987). Nonmetric multidimensional scaling of asymmetric proximities. *Behaviormetrika*, No.21, 81-96.
- Okada, A., & Tsurumi, H. (2020). A New Method of Constructing Brand Switching Matrix. *Archives of Data Science, Series A*, 6(2), 1-12.
- R Core Team (2024). *_R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <<https://www.R-project.org/>>.
- Ten Berge, J. M. (1993). *Least squares optimization in multivariate analysis*. Leiden: DSWO Press, Leiden University.
- Tobler, W. (1995). A graphical introduction to survey adjustment. *Cartographica*, 32
- Zielman, B. and Heiser, W.J. (1993). Analysis of asymmetry by a slide-vector. *Psychometrika*, 58, 1011-14.

Appendix

データの分析には以下のRプログラムを利用した。なお、プログラム中のデータおよびパラメータの表現は本文とは一致していない。

```
asymmetry_pca <- function(X, m = 2, itter = 100000, epsilon = 10^(- 8)){
  # 分析条件チェック
  if(nrow(X) != ncol(X)){
    stop(“データの列数と行数が違います”)
  }
  ##### 関数の用意
  #FLAの更新
  FLA_updater <- function(X, D, m){
    res_svd <- svd(X - D)
    mat_F <- res_svd$u
    mat_L <- diag(res_svd$d)
    mat_A <- res_svd$v
    return(list(mat_F = mat_F[, 1 :m, drop = F], mat_L = mat_L[ 1 :m, 1 :m, drop = F],
    mat_A = mat_A[, 1 :m, drop = F]))
  }
  # Dの更新
  D_updater <- function(X, mat_F, mat_L, mat_A){
    mat_D <- diag(diag(X - mat_F %*% mat_L %*% t(mat_A)))
    return(mat_D)
  }
  # 残差のチェック
  objective_function <- function(X, mat_F, mat_L, mat_A, mat_D){
    return(sum((X - mat_F %*% mat_L %*% t(mat_A) - mat_D)^ 2))
  }
}
```

```

#### 初期値設定
mat_D <- matrix(0, nrow=nrow(X), ncol=ncol(X))
mat_A <- matrix(0, nrow=nrow(X), ncol=m)
mat_L <- matrix(0, nrow=m, ncol=m)
mat_F <- matrix(0, nrow=nrow(X), ncol=m)

objective_value <- objective_function(X, mat_F = mat_F, mat_L = mat_L, mat_A =
mat_A, mat_D = mat_D)

#### 目的関数の値の記録
loss_move <- numeric(itter)

#### ループ最適化
for(i in 1:itter){
  #FLAの更新
  res_updateFLA <- FLA_updater(X, D = mat_D, m)
  mat_F <- res_updateFLA$mat_F
  mat_L <- res_updateFLA$mat_L
  mat_A <- res_updateFLA$mat_A

  #Dの更新
  mat_D <- D_updater(X, mat_F = mat_F, mat_L = mat_L, mat_A = mat_A)

  #残差のチェック
  objective_value_new <- objective_function(X, mat_F = mat_F, mat_L = mat_L,
mat_A = mat_A, mat_D = mat_D)

  loss_move[i] <- objective_value_new

  #収束判定
  if(1 - objective_value_new / objective_value < epsilon){
    cat(paste("iteration", i))

    return(list(mat_F = mat_F, mat_L = mat_L, mat_A = mat_A, mat_D = mat_D,
loss = loss_move[1:i], itter = i))
  }

  objective_value <- objective_value_new
}

```

```
    }  
    return(list(mat_F = mat_F, mat_L = mat_L, mat_A = mat_A, mat_D = mat_D, loss  
              = loss_move[ 1 :i], itter = i))  
  }  
}
```