

# 和が等しくなるような自然数列の 区切り方についての追記

安楽和夫・野間口謙太郎\*

Additions to the note on the sequences of divided natural numbers  
with same sum

Kazuo Anraku and Kentaro Nomakuchi

## 1 はじめに

自然数列について，次のような性質が知られている：

$$\begin{array}{l} \underbrace{1+2}_{2\text{個}} = \underbrace{3}_{1\text{個}}; \\ \underbrace{4+5+6}_{3\text{個}} = \underbrace{7+8}_{2\text{個}}; \\ \underbrace{9+10+11+12}_{4\text{個}} = \underbrace{13+14+15}_{3\text{個}}; \\ \underbrace{16+17+18+19+20}_{5\text{個}} = \underbrace{21+22+23+24}_{4\text{個}}; \\ \dots \end{array}$$

1 から始まる 2 個の自然数の和と次の 3 が等しく，次の 4 から始まる 3 個の自然数の和と続く 2 個の自然数の和が等しい．続けて，次の 4 個の自然数の和とその後に続く 3 個の自然数の和が等しいという関係が認められる．

このような数のグループに区切られる数を一松[2] では台形数と呼んでいる．安楽[1] はこの数字の区切り方をより一般的な場合に調べている．つまり

---

\* 高知大学理学部名誉教授

$k$  個の数からなるグループ内の和と続く  $l$  個の数の和が等しく、その後の  $k+d$  個のグループ内の和と  $l+d$  個の数の和が等しくなるような  $(k, l, d)$  と対応する数の区切り方についてである。

安楽[1] では、 $d(\geq 1)$  に着目して調べた。

例えば、 $d=2$  については、次のような区切り方ができる：

$$\begin{aligned} \underbrace{0+1+2}_{3\text{ 個}} &= \underbrace{3}_{1\text{ 個}}; \\ \underbrace{4+5+6+7+8}_{5\text{ 個}} &= \underbrace{9+10+11}_{3\text{ 個}}; \\ \underbrace{12+13+14+15+16+17+18}_{7\text{ 個}} &= \underbrace{19+20+21+22+23}_{5\text{ 個}}; \\ &\dots, \end{aligned}$$

ここでは、最初は3つの数で、「0」から始まっている。 $d$  の値によっては、最初の数が負の数から始まるものもある。この覚え書きでは、上に述べた、 $k, l, d$  の関係と、最初の数が「1」から始まる数の並びについて考察する。

## 2 $k, l, d$ の関係について

安楽[1] では、 $k=l+d$  を前提として、数の区切り方を考えたが、和が等しくなるような数の区切りを考える場合、 $k=l+d$  でなければならないことを確認しておこう。

等差数列  $a_n = n + b$  ( $n$  は 0 以上の整数、 $b$  は整数とする) に関して、連続した 4 つのグループに区分して考える。

$$A_1 : a_n, \dots, a_{n+k-1} (k \text{ 個})$$

$$B_1 : a_{n+k}, \dots, a_{n+k+l-1} (l \text{ 個})$$

$$A_2 : a_{n+k+l}, \dots, a_{n+2k+l+d-1} (k+d \text{ 個})$$

$$B_2 : a_{n+2k+l+d}, \dots, a_{n+2k+2l+2d-1} (l+d \text{ 個})$$

各グループ内での数列の和も、同じく  $A_1, B_1, A_2, B_2$  で表すことにする。このとき、次の関係が成り立つ。

$$2A_1 = (2n + 2b + k - 1)k$$

同様に

$$2B_1 = \{(n+k) + b + (n+k+l-1) + b\}l = (2n+2b+2k+l-1)l$$

$$2A_2 = \{(n+k+l) + b + (n+2k+l+d-1) + b\}(k+d)$$

$$= (2n+2b+k-1)k + (2n+2b+k-1)d + (2k+2l+d)(k+d)$$

$$= 2A_1 + (2n+2b+k-1)d + (2k+2l+d)(k+d)$$

$$2B_2 = \{(n+2k+l+d) + b + (n+2k+2l+2d-1) + b\}(l+d)$$

$$= (2n+2b+2k+l-1)l + (2n+2b+2k+l-1)d + (2k+2l+3d)(l+d)$$

$$= 2B_1 + (2n+2b+2k+l-1)d + (2k+2l+3d)(l+d)$$

これより

$$\begin{aligned} 2(B_2 - A_2) &= 2(B_1 - A_1) + (k+l)d + 2d^2 + (2k+2l+3d)l - (2k+2l+d)k \\ &= 2(B_1 - A_1) + 2(l+d)^2 - 2k^2 \end{aligned}$$

すなわち

$$B_2 - A_2 = B_1 - A_1 + (l+d)^2 - k^2$$

このことから、次がわかる：

- (i)  $A_1 = B_1$  かつ  $A_2 = B_2$  ならば  $k = l + d$  である.
- (ii)  $A_1 = B_1$  かつ  $k = l + d$  ならば  $A_2 = B_2$  である.
- (iii)  $A_2 = B_2$  かつ  $k = l + d$  ならば  $A_1 = B_1$  である.
- (iv)  $k = l + d$  ならば,  $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$  あるいは  $A_1 - A_2 = B_1 - B_2$  である.

これにより,  $A_1 = B_1$  となる  $k$  と  $l$  が見つけれられたら, それ以降  $A$  と  $B$  のグループ内の数の個数を同じ数  $d = k - l$  個ずつ増やしていても等号は成り立つ. あるいは,  $d$  個ずつ減らしていても等号は成り立つ.

また, (iv) から,  $k = l + d$  が成り立つとき,  $A_1 \neq B_1$  であったとしても, 2通りの差が一定であることがわかる.

なお, 上記の関係はある自然数  $a$  に対し,  $a_n = an + b$  としても得られる.

### 3 和が等しくなるような自然数列の区切り方について(1 から始まる場合)

前節における  $b$  を  $b = 1$  とし,  $a_0 (= 1)$  から  $a_{k-1}$  までの  $k$  個の区分を  $A_1$  とし,

$a_k$  から  $a_{k+l-1}$  までの  $l$  個の区分を  $B_1$  とするとき,  $A_1=B_1$  となる一連の  $k>l$  を見つける手続きを考える. 条件は

$$k(k+1) = (k+l)(k+l+1) - k(k+1)$$

つまり

$$2k(k+1) = (k+l)(k+l+1) \quad (1)$$

である. これを  $k$  についての方程式

$$k^2 + (1-2l)k - l(l+1) = 0$$

として解く.  $k>l$  なので

$$\begin{aligned} k &= \frac{-(1-2l) + \sqrt{D}}{2} \\ &= \frac{-(1-2l) + (2d+1)}{2} \\ &= l+d \end{aligned}$$

である. ただし,

$$D = (1-2l)^2 + 4l(l+1) = 8l^2 + 1 = (2d+1)^2$$

と置いている. つまり, 次が解ければよい.

$$l^2 = \frac{1}{2} d(d+1) \quad (2)$$

このとき,  $d$  と  $d+1$  は互いに素である. したがって,  $d$  と  $d+1$  のどちらが偶数になるかによって,  $g \geq 1$  と  $h \geq 0$  を用いて表現された 2 つの場合が考えられる.

(A)  $d=2g^2$  かつ  $2g^2+1=(2h+1)^2$  の場合

(B)  $d+1=2g^2$  かつ  $d=2g^2-1=(2h+1)^2$  の場合

どちらかが成り立っていると仮定して, それぞれの場合について考えよう.

(A)  $d=2g^2$  かつ  $2g^2+1=(2h+1)^2$  の場合は,  $h \geq 1$  である.

$$l^2 = g^2(2g^2+1) = g^2(2h+1)^2$$

なので,

$$l = g(2h+1), \quad k = l+d$$

である. また,  $2g^2+1=(2h+1)^2$  より,

$$g^2 = 2h(h+1)$$

と表せる. ここで,

$$g = 2m$$

とおくと,

$$2m^2 = h(h+1) \quad (3)$$

となるが, これは(2)と同じ形式の方程式である. このとき, 次の対応

$$m \leftrightarrow l, \quad h \leftrightarrow d$$

を考えると,  $(l, d)$  よりも小さな  $(m, h)$  についての同じ方程式が導かれたことになる. この  $(m, h)$  に対して

$$l' = m$$

$$k' = m + h$$

が  $(k, l)$  よりも小さな解として得られる. (A) が成り立つと仮定した場合には, 元の解である  $(k, l)$  よりも小さな解  $(k', l')$  を構成できる.

逆に, 小さな解  $(k', l')$  から, 大きな解  $(k, l)$  を構成するには,

$$m = l'$$

$$h = k' - l'$$

とおくと,

$$g = 2m, \quad d = 2g^2 = 4h(h+1) = 8m^2$$

となり, 新しい解は次で与えられる.

$$l = g(2h+1) = 2m(2h+1) = 2l'(2k' - 2l' + 1)$$

$$k = 2m(2h+1) + 8m^2 = 2m(2h+4m+1) = 2l'(2k' + 2l' + 1)$$

(B)  $d+1=2g^2$  かつ  $d=2g^2-1=(2h+1)^2$  の場合について考える.  $h=0$  の場合は,  $d=g=1$  であり, 解として  $(k, l) = (2, 1)$  が存在する. 以下においては  $h \geq 1$  と仮定する.  $2g^2-1=(2h+1)^2$  より

$$g^2 = \frac{1}{2} ((2h+1)^2 + 1) = 2h(h+1) + 1$$

と表せる. なおこのとき,

$$l^2 = \frac{1}{2} 2g^2(2h+1)^2, \quad \text{つまり } l = g(2h+1)$$

である.

$g$  は奇数なので,

$$g = 2m + 1$$

とおくと,

$$2m(m+1) = h(h+1) \quad (4)$$

を得る. これは(1)と同じ形式の方程式である. 次の対応

$$m \leftrightarrow k, \quad h \leftrightarrow k+l$$

により,  $(k', l') = (m, h-m)$  を考えると,  $(k, l)$  を  $(k', l')$  で置き換えた方程式(1)を満足するので,  $(k, l)$  よりも小さい解が存在することが分かる. ただし, (4) で  $h=0$  の場合, つまり解  $(k, l) = (2, 1)$  にはこれよりも小さな解は構成できない.

逆に, 小さな解  $(k', l')$  から, 大きな解  $(k, l)$  を構成するには,

$$m = k'$$

$$h = k' + l'$$

とおくと,

$$g = 2m + 1 = 2k' + 1, \quad d = 2g^2 - 1 = (2h + 1)^2 = (2k' + 2l' + 1)$$

となり, 新しい解は次で与えられる.

$$l = (2m + 1)(2h + 1) = (2k' + 1)(2k' + 2l' + 1)$$

$$k = (2m + 1)(2h + 1) + (2h + 1)^2 = 2(2k' + l' + 1)(2k' + 2l' + 1)$$

**結論:**  $(k, l) = (2, 1)$  以外の解には, (A)と(B)の場合のどちらかが成り立ち, 必ず小さな解を構成できる. また逆に, 解  $(k, l)$  から2種類の大きな解を導くことができる. ゆえに, すべての解は, 解  $(k, l) = (2, 1)$  から出発して, 上の2通りの方法により導くことができる. また, これにより解は無限個存在することが分かる.

具体的な  $(k, l)$  の最初のいくつかは次のようである:

$$(2, 1) \implies (14, 6), (84, 35)$$

$$(14, 6) \implies (492, 204), (2870, 1189)$$

$$(84, 35) \implies (16730, 6930), (97512, 40391)$$

$$(492, 204) \implies (568344, 235416), (3312554, 1372105)$$

$$(2870, 1189) \implies (19306982, 7997214), (112529340, 46611179)$$

$(16730, 6930) \implies (655869060, 271669860), (3822685022, 1583407981)$   
 $(97512, 40391) \implies (22280241074, 9228778026), (129858761424, 53789260175)$

## 4 最後に

3 節の結果は,  $b=1$  (1 から始まる自然数列) の場合の最初のグループ  $(A_1, B_1)$  となりえる項数  $(k, l)$  のすべてを求める手続きを与えている. 一般の  $b (\neq 1)$  の場合について

- (1)  $b \leq 0$  のとき, 問題は  $b' = -b + 1$  に対する問題に還元できる.
- (2)  $b = 2, 3$  の場合は  $b = 1$  の場合の解  $(k, l)$  を  $2b - 1$  倍して得られる解がすべてである. これらは 3 節と同様のやり方で確かめられる.
- (3)  $b \geq 4$  のとき,  $b = 1$  の場合の解  $(k, l)$  を  $2b - 1$  倍して解が得られるが, それがすべてとは限らない.  $b \geq 4$  の場合の解のすべてがどのようなものになるか, 詳細は現段階では未解明である.

一般の場合についての考察は, 別の機会に公表したい.

## 参考文献

- [1] 安楽和夫 (2020) 「和が等しくなるような自然数列の区切り方について」 西南学院大学人間科学論集 16(1), 203-213.
- [2] 一松 信 (2019) 「続・創作数学演義」 (現代数学社)