

指数連動型投資と個別裁量型投資： 資本資産価格モデルによる規範的分析

分 部 利 紘

Index-Tracking and Discretionary Investing:
A Normative Assessment within the Capital Asset Pricing Model

Toshihiro Wakebe

1. 資産運用の二つのスタイルとその経済性

近年、個人の資産運用の手段として投資信託が広く活用されている。2024年に本邦の個人や個人事業主などの一般会計が投資信託に新たに振り分けた資金は11.6兆円であったが、これは預貯金の19.3兆円に次ぐ規模であった（日本銀行調査統計局, 2025）。投資信託とは、販売会社が個人投資家から資金を集め、それを信託銀行が保管するとともに運用会社からの指示に従って株式や債券、不動産投資信託などを売買するという三分業体制の投資形態および金融商品である。個人投資家は、投資先や売買タイミングに関する判断を運用会社に委託することで、自身の投資量に応じて運用成果（i.e., 利益や損失）を受け取る。同時に委託・運用の対価として、個人投資家は投資信託を購入する際に販売手数料を支払う他、信託財産から運用手数料（信託報酬）を日々支払うことになる。

投資信託はその運用形態によって、指数連動型（パッシブ運用）と個別裁量型（アクティブ運用）に大別できる（Sharpe, 1991）。指数連動型とは、運用会社が、市場を構成する銘柄をそれらの時価総額比率に応じて保有するなどしたうえで、保有資産の評価額が市場平均（指数）から乖離しないように運用する手法である。本邦で言えば、TOPIX（東証株価指数；東京証券取引所最上位

市場に上場している各企業の株価を浮動株調整後の時価総額で重みづけした指数)に連動させる運用方法が典型となる。指数は、構成銘柄の好業績を受けて上昇する他、構成銘柄から得た利息や配当金の再投資によって上昇する。指数連動型はこのような指数に連動させることで、市場平均に沿った収益の獲得を目指している。

また、指数連動型は市場平均に連動させる“だけ”の投資方法であるため、投資信託の運用会社が独自に投資先を選定したり売買のタイミングを判断したりする必要がない。つまり指数連動型は運用コストが小さい。そのため、個人投資家が運用会社に支払うコストも安価になる。例えばTOPIXなどの日本国内の株式指数に投資する日本国内の投資信託の信託報酬は、年0.5%程度とされている(金融庁、2022)。また、分散性もその重要な特徴となる。株式市場では特定銘柄の株価が急騰したり急落したりすることがある。指数連動型は市場を構成する銘柄全体に投資するため、特定銘柄の急騰や急落による影響が希薄化される。つまり指数連動型は、収益の変動(リスク)を分散する運用方法であると同時に、原理的に、市場平均を上回る収益(超過収益)を得ることのできない運用方法でもある。

これに対して個別裁量型は、投資する市場や銘柄を運用会社が選別し、その投資比率を市場平均の構成比から逸脱させて運用する手法である(Sharpe, 1991)。後述するように、各上場企業の株価は当該企業価値を反映して決定されるが、常に正確に反映されるとは限らない。当該企業の現在および将来の価値よりも高く評価されることもあれば、低く評価されることもある。またそれらの過大評価や過小評価は、何かの契機に是正されることもある。個別裁量型はこのような企業の現在および将来の価値に加え、現在の株価の不適切性(ミスプライシング)を捉えることで、超過収益を狙う投資方法である。

個別裁量型は、ファンドが自らの裁量で投資先の選択や売買のタイミングを決めるため、投資先に関する調査や分析に要するコストや売買に関する意思決定に要するコストが高くなる。この高コスト性は個人投資家の支払う信託報酬に反映されることになる。例えば、日本国内の株式に投資する日本国内の個別裁量型投資信託では、信託報酬が指数連動型投資信託の3倍近い年1.4%程度

となる（金融庁，2022）。また、個別裁量型は市場平均に投資するよりも高い収益を手にする可能性があるが、投資先や売買タイミングの判断を誤ることで、市場平均よりも低い収益になったり市場平均よりも大きな損失になったりする可能性もある。つまり個別裁量は、収益の変動であるリスクが高い投資方法でもある。

なお株式投資においては、個人投資家が株式系の投資信託を活用せずに、投資先とタイミングを自ら判断して投資する場合がある。このように個人投資家に直接開かれている株式投資においても、同様の区分が当てはまりうる。まず、指数連動型投資信託に近い株式投資には、指数連動 ETF（上場投資信託）の購入が該当する。これは TOPIX などの指数に連動させる投資信託であるが、証券取引所に上場しているため、個人投資家も直接それを売買することができる。また、投資信託であるため信託報酬が掛かるが、金銭コストは高くない。例えば日本取引所グループの公開資料（日本取引所グループ，n.d.）を見ると、2025 年 5 月時点で東京証券取引所に上場している指数連動型 ETF のうち、TOPIX、日経平均、JPX400 という主要市場平均のいずれかに連動する ETF は、平均で 0.10% であった（ $n=26$ ）。また、市場平均に投資するため、個人投資家は投資先や売買タイミングを分析する必要性が少なくなる。上述したように、株価は基本的には当該企業の現在および将来の価値を反映しているが、常に正確なわけではなく、割高・割安などのミスプライシングが発生していることも少なくない。だがこれらの割高・割安は、多数の銘柄に投資することで多数の法則によって一定程度相殺されると想定できる。この結果、指数連動型 ETF への投資は、個人投資家が投資先や売買タイミングに関する情報を自ら集めて分析し、その結果をもとに取引する必要性が低くなる¹。つまり、後述する個別株投資に比べ、情報コストと意思決定コストが低い株式投資となる。但し、市場平均に投資する方法であるため、原則的に超過収益を得ることはできない。これらの性質は、先の指数連動型投資信託と同様であるため、指数連動

¹ 1980 年代後半の日本や 1990 年代末の米国で見られたバブルは、市場平均の過大評価と言える。これは、指数連動型 ETF でもミスプライシングなどの分析が行われうることの証左であるが、その必要性は個別株投資よりも相対的に低いと言えよう。

型 ETF はそれに対応した株式投資と言える。

一方、個別裁量型に近いものとしては個別株投資が挙げられる。個別株投資は、「トヨタ自動車」や「三菱商事」など、上場企業の中から個人投資家が自ら投資先を選び、比較的少数の特定銘柄に投資する方法である。この方法は超過収益を得られる可能性があるうえ、信託報酬をとられることもないため、金銭コストは指数連動型ETFよりも低い²。しかし、投資した特定銘柄の株価が急騰した場合は大きな収益を得られるものの、その株価が急落する恐れもあり、リスクが高い。これを避けるには、企業の財務諸表や経営方針、ビジネスモデル、競争優位性、マクロ経済環境などについて情報を集め、それをもとに現在の株価が割高か割安かを判断する必要がある。そのため個別株投資は、金銭コストこそ低いものの、情報コストや意思決定コスト、さらには一定の経験やスキルを得るための学習コストなどを総合すると、コストの高い投資方法と言える。これらの性質は個別裁量型投資信託と同様であるため、個別株投資はそれに対応した株式投資と捉えることができる。

以上のように投資信託あるいは個人が行う株式投資は、ポートフォリオ (i.e., 複数の資産を特定の比率で組み合わせたもの) の構築戦略によって指数連動型と個別裁量型に大別され、さらにその戦略の帰結としてリスクやコストに違いが生じる。では、指数連動型と個別裁量型のどちらの投資形態が望ましいのであろうか。無論、資産運用の実務では「指数連動型か個別裁量型か」と二律排反にするのではなく、それぞれの長所と短所を踏まえて併用すべきであろう (Jorion, 1986)。だが、敢えて「どちらが望ましいのか?」と二項対立にすることで、「人 (特に資産運用の素人) はどちらを好むのか?」「なぜそれを好むのか? その選好は人のどのような心理特性を反映した結果なのか?」などの心理学的な問いが新たに生まれ、金融経済に関係するヒトの判断・意思決定がより明らかになる。また、金融経済学の理論では「ヒトはリスク資産を収益の期待値と分散から評価する」など、ヒトの心理・行動について様々な想定が導入される。これらの想定について心理学的に検討することで、記述的妥当性

² 売買を繰り返せば販売手数料がかさむが、それはETFも同じであるため、除外する。

の高い理論構築も視野に入るであろう。しかし、どちらの運用戦略が望ましいか、その根拠は何かを知るためには金融経済学の理論を一定程度理解する必要があるが、そのためには相応の数学的知識が求められるうえ、平易に解説した資料等も少ない。そこで本論文では、当該問題に関して最も重要かつ基礎的な金融経済学の理論について、できるだけ平易な解説、特に使用する数学も高校一年程度に留めた解説を行う。これにより、「指数連動型と個別裁量型のどちらの投資形態が望ましいのか？人（特に資産運用の素人）はどちらを好むのか？なぜそれを好むのか？その選好は人のどのような心理特性を反映した結果なのか？」という問題に関する知識基盤を形成することを目指す。

2. CAPM

指数連動型と個別裁量型のどちらを選ぶべきか。この答えとして最も重要になる金融経済学の理論が、Sharpe (1964)、Lintner (1965)、Mossin (1966) によって提唱された Capital Asset Pricing Model（資本資産価格モデル；以下、CAPM）であろう。これは以下に述べるような考えに基づき、「市場平均を保有することで、リスク単位あたりに得られると期待できる収益（リスク調整済み期待超過収益）を最大化できる」とする理論である。

2-1. CAPM：2種類のリスク

投資すれば利益が出るとは限らず、損失が出ることも少なくない。つまり投資にはリスクがある。このようなリスクは、(1) 個別株の好業績に伴う急騰や業績不振に伴う急落など、投資した資産に固有のリスク（非システムティックリスク）と、(2) 2020年3月のCOVID-19による世界規模の株価急落など、市場全体に共通するリスク（システムティックリスク）とに分類できる。これらのリスクに対して1950年代以降、様々な理論により「多様な資産に幅広く投資すれば非システムティックリスクは偶然の変動として大幅に低減できるため、システムティックリスクだけが残る」と示されてきた（Markowitz, 1952）。例えば業績不振による個別株の急落は、市場全体に投資するなど、分散投資によってその影響を大きく低減できる。このように非システムティックリスクは十分に制御できる以上、それに見合ったリターンを求めることは非合

理である。一方、パンデミックに伴う世界規模の株価急落は、多くの市場で多くの銘柄が同時に売られて生じるため、分散投資をして多数の銘柄を保有していてもその影響を免れ難い。このようにシステムティックリスクは制御しにくいいため、投資と言うリスクをとるからにはそれに見合った収益が必要である。では、システムティックリスクに見合う収益とはどのようにして決まるのであろうか。

2-2. CAPM：リスク資産の組み合わせと効率的フロンティア

本問題に対してCAPMでは、最初に「投資家は、投資して得られると期待できる収益の平均値（期待収益）と、収益の分散（変動）であるリスクをもとに、各資産を評価する（平均－分散最適化）」および「全ての投資家は収益の分布に関する情報を持っており、それをもとに各資産の期待値と分散を計算する（同質期待）」という想定（Markowitz, 1952）を立てる。そのうえで、投資可能な全てのリスク資産から任意に取り出して構築された各ポートフォリオについて、それぞれのリスクと期待収益を評価する。同時に、リスクを横軸、期待収益を縦軸とした平面に各ポートフォリオをプロットする。すると、構築された各ポートフォリオは、放物線ないし双曲線状に分布することが知られている（Figure 1）³。

平均－分散最適化の仮定から、投資家は各ポートフォリオを期待収益とリスクを軸に評価する。結果、リスクが同程度であれば期待収益のより高いポートフォリオが、期待収益が同程度であればリスクのより低いポートフォリオが、それぞれ選ばれることになる。この結果、放物線ないし双曲線状の上部エッジ（Figure 1の実線部）に位置するポートフォリオだけが選ばれうることになる。なぜなら、このエッジ部分は、「そのリスク水準（i.e., 横軸の値）においては、

³ 例えば資産*i*と資産*j*を組み合わせた資産*ij*の期待収益とリスクを考えると、期待収益 μ_{ij} は、資産*i*と資産*j*の期待収益をそれぞれの配分比率（e.g., 60%-40%）で重みづけた平均値（ $\mu_{ij}=w_i\mu_i+w_j\mu_j$ ）となり、重み*w*に対して線形（一次関数）に変化する。一方リスク σ_{ij} は、資産*i*と資産*j*の各分散（ σ_i^2, σ_j^2 ）をそれらの配分比率の2乗（ w_i^2, w_j^2 ）で重みづけた値に、資産*i*と資産*j*の配分比率で重みづけた2つの資産の共分散（ $\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$ ）を加えた値（ $\sigma_{ij}=\sqrt{w_i^2\sigma_i^2+w_j^2\sigma_j^2+2w_iw_j\times\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}}$ ）となる。これは*w*に対して二次関数の式であり、相関係数 ρ_{ij} が1でない限りは共分散項が分散項を押し下げるため、下への曲率が生じ、放物線ないし双曲線状になる。

当該ポートフォリオが最も期待収益（i.e., 縦軸の値）が高い」、または「その期待収益（i.e., 縦軸の値）においては、当該ポートフォリオが最もリスク（i.e., 横軸の値）が低い」ためである。このエッジ部分のポートフォリオを効率的フロンティアと言う。反対に効率的フロンティア以外は全て、「同じリスク水準でありながら、期待収益のより高いポートフォリオが他にある」または「同じ期待収益でありながら、リスクのより低いポートフォリオが他にある」ため、いずれも最適ではないポートフォリオとなる。

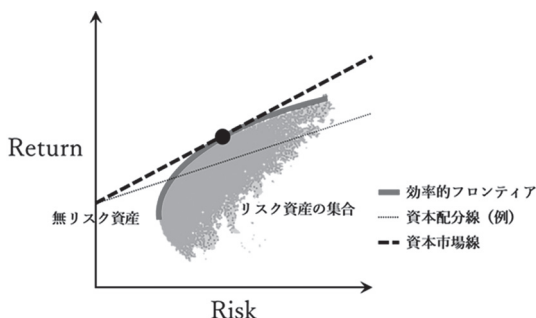


Figure 1. ポートフォリオの効率的フロンティアと資本配分線／資本市場線

但し、効率的フロンティアにも限界がある。一つはリスクに関するものである。Figure 1は、リスク資産を組み合わせることで構築した多数のポートフォリオを、リスクを横軸、期待収益を縦軸とした平面上に表したものである。このうち、リスク（横軸の値）が最小のポートフォリオは効率的フロンティアの左端に位置するが、それでもそのリスクはゼロより大きい。つまり株式などのリスク資産をどのように組み合わせても、それがリスク資産である以上、一定程度のリスクが残ることになる。もう一つの限界は期待収益に関するものである。効率的フロンティア上の各ポートフォリオはそれぞれのリスク水準において最大の期待収益を持つものであるが、それでも効率的フロンティアが上限であり、その上側に出ることはできない。つまりリスク資産を単に組み合わせただけでは、効率的フロンティア以上の期待収益は得られない。したがって効率的フロンティアは、リスク資産だけで構築したポートフォリオの中では最適であるが、リスクをそれ以上減らすことも期待収益をそれ以上増やすこともできな

い限界点にもなっている。

2-3. CAPM：リスク調整済み期待収益あるいはシャープレシオ

これらの限界に対してCAPMでは、無リスク資産を導入する。例えば短期国債は、国が財政破綻しない限り利子も元本も保証される。さらに、償還年限も短いため、破綻リスクは極めて小さい。そのため短期国債は、期待収益（利子）が正で、リスクが実質的にゼロの資産、すなわち無リスク資産と想定できる。では、このような無リスク資産を効率的フロンティアのポートフォリオと組み合わせて構築したポートフォリオ（以下、混合ポートフォリオ）は、先の平面上でどのように表現されるのであろうか。

まず無リスク資産は、横軸のリスクがゼロ、縦軸の期待収益が正となる。そのため、無リスク資産を組み合わせてできる混合ポートフォリオは、縦軸との共有点、特に0より大きい共有点 a を持つことになる。また、混合ポートフォリオは効率的フロンティア上のポートフォリオと組み合わせてできるため、その混合ポートフォリオを表す線は効率的フロンティアとも共有点を持つことになる。結果、無リスク資産と効率的フロンティア上のポートフォリオから構成された混合ポートフォリオは、この2つの共有点を結ぶ $y=a+bx$ の直線⁴（Figure 1の2つの点線）となる。この直線を資本配分線と言う。

この直線の傾き b はシャープレシオと呼ばれ、極めて重要になる（Sharpe, 1966）。無リスク資産と効率的フロンティア上のポートフォリオで構成された混合ポートフォリオ p は、期待収益－リスク平面において、無リスク資産の期待収益 a を切片とする直線を描く。また一般に、傾き（平均勾配）は横軸の増加幅に対する縦軸の増加幅の比となる。したがって資本配分線の傾き（シャープレシオ）は、ポートフォリオ p と無リスク資産 f の期待収益の差 $E(r_p) - r_f$ と、

⁴ 無リスク資産の期待収益は正であるため、混合ポートフォリオの期待収益は、効率的フロンティア上のポートフォリオと無リスク資産のそれぞれの期待収益をその配分比率で重みづけた平均値（ $\mu_{ij} = w_i \mu_i + w_j \mu_j$ ）となる。一方、無リスク資産のリスク、つまり期待収益の分散は定数ゼロになるため、無リスク資産と効率的フロンティア上のポートフォリオとの共分散もゼロになる。この結果、混合ポートフォリオのリスクは、リスク資産だけのポートフォリオとは異なり、リスク資産の標準偏差に配分比率を掛けた値（ $\sigma_{ij} = \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2}$ ）になる。どちらも無リスク資産とリスク資産の配分比率に応じて単調に増加するため、直線になる。

ポートフォリオ p と無リスク資産 f のリスクの差 $\sigma_p - \sigma_f$ の比となる。

$$S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p - \sigma_f}$$

この式の分子は、ポートフォリオ p と無リスク資産 f の期待収益の差、つまり「無リスク資産のみの期待収益に比べてポートフォリオ p はどれほど期待収益が多いか」という期待超過収益を表す。それを両者のリスクの差で割るため、ポートフォリオ p のシャープレシオとは、「リスクが一単位増えたとき、ポートフォリオ p の期待超過収益はどれほど増えるか」というポートフォリオ p のリスク調整済み期待超過収益を意味する。したがって、シャープレシオが大きいほど、リスク一単位あたりの期待超過収益が大きいこと、同じリスクでより高い超過収益を期待できること、収益の効率性が良いことを意味する。

なお無リスク資産 f のリスク σ_f は実質的にゼロとなるため、通常はシャープレシオ S_p を求める式の分母から省略される。

$$S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

この式からも分かるように、ポートフォリオ p のシャープレシオは、「ポートフォリオ p の期待収益は無リスク資産の期待収益をどれほど上回るか、そしてそれはポートフォリオ p のリスクの何倍に相当するか」を表すことになる。したがって、例えばポートフォリオ p が、無リスク資産に対して 5% の超過期待収益をもつ場合と 10% の超過期待収益を持つ場合では、超過期待収益のより高い後者のほうがシャープレシオは高くなる。また、同じように 10% の期待超過収益を持つ場合でも、例えば平均で 30% も収益が変動する中での 10% の期待超過収益と、平均で 1% しか収益が変動しない中での 10% の期待超過収益では、後者のほうがシャープレシオも高くなる。これは後者のほうがより小さいリスクで大きな収益を上げたことを意味している。このようにシャープレシオは、特定の数値と基準値の差を変動の大きさに割ったものとなる。それゆえ、概念的には z 得点と相同すると言える。

2-4. CAPM：リスク調整済み期待超過収益の最大化

では、混合ポートフォリオのシャープレシオ、あるいは資本配分線の傾きは

どのときに最大になるのであろうか。例えば、資本配分線の傾きが緩やかで効率的フロンティアとの共有点が交点になる場合、それは、リスクが同程度で期待超過収益のより高いリスク資産が他にあるにもかかわらず、それと組み合わせられていない非効率な状態になる (Figure 1 の細い点線)。逆に、傾きが急すぎる場合は、今度は効率的フロンティアとの共有点がなくなり、「投資可能なリスク資産との混合ポートフォリオ」という定義から外れる。このように考えていくと、無リスク資産とリスク資産の混合ポートフォリオを表す資本配分線の傾きが最大となるのは、直線が効率的フロンティアとの接線になるとき (Figure 1 の太い点線)、その一点のみと分かる。この接線を資本市場線と言うが、これは「混合ポートフォリオのシャープレシオ、あるいはリスクあたりの期待超過収益は、資本市場線で最大になる」ということである。なお、このときの接点 (Figure 1 の黒丸) に位置する効率的フロンティア上のポートフォリオのことを、接点ポートフォリオと言う。

Figure 1 にあるように、資本市場線は効率的ポートフォリオと常に同値以上の高さにある。これは、全てのリスク水準 (i.e., 横軸の値) において、資本市場線が期待超過収益の最も高いポートフォリオになることを意味している。また直線であるため、どのリスク水準においても傾き (シャープレシオ) は同じになる⁵。つまり、無リスク資産と接点ポートフォリオの組み合わせを表現する資本市場線は、どのリスク水準でもリスク調整済み期待超過収益が最も大きく、かつどのリスク水準でもその値は変わらない。そのため、投資家は自身の許容可能なリスク水準に応じて好きな割合で、無リスク資産と接点ポートフォリオに自身の資金を配分すれば、常に最適なポートフォリオを構築できることになる。つまり接点ポートフォリオを構成するリスク資産と無リスク資産の組み合わせに対し、リスク許容度の低い投資家が自身の資金を無リスク資産だけにつぎ込んで、リスク許容度の高い投資家が自身の資金を同リスク資産だけにつぎ込んで、さらには、リスク許容度のより高い投資家が信用取引などのレバレッジを用いて自身の資金を 300% にして同リスク資産だけにつぎ込んで

⁵ 厳密には、無リスク資産のみのときにはリスク (i.e., 分散; 標準偏差) がゼロになり、傾きを定義できないため、接点ポートフォリオ側からの極限操作で得られる値となる。

も、それぞれが自身のリスク水準で最もリスク調整済み期待超過収益の高いポートフォリオとなり、かつその値はどれも同じになる。これは二基金分離定理 (Tobin, 1958) と呼ばれ、上述した効率化フロンティアの2つの限界を超える戦略となる。

2-5. CAPM：リスク資産の最適な組み合わせと市場平均

さらに、個々の投資家がリスク調整済み期待超過収益の最大化を目指して行動する、すなわち投資可能な全てのリスク資産に対してリスク調整済み期待超過収益（シャープレシオ）が最大となるように自身の資金を配分し、無リスク資産と組み合わせると、各投資家にとって最適なリスク資産の構成比率が市場平均と一致することになる。

上述したように CAPM では、「全ての投資家は収益の分布に関する情報を持っており、それをもとに各資産の期待値と分散を計算する（同質期待）」、つまり全員が同じ情報をもとに投資を行うと仮定する。この結果、各リスク資産の期待収益やリスクの評価、ひいてはどのリスク資産をどの比率で保有することが最適かという判断が全ての投資家で同じになる。いま、リスク資産として資産 i と資産 j しか存在せず、それらを「70 : 30」の比率で保有することがリスク資産の最適な組み合わせになるとする。投資家の中には、リスク許容度が高く自身の資金の 80% をリスク資産に配分する者もいれば、リスク許容度が低くリスク資産には自身の資金の 10% しか配分しない者もいるであろう。しかし、リスク資産に配分された各々の資金 (i.e., 前者の 80%、後者の 10%) については、全員が同じ最適な比率「 $i : j = 70 : 30$ 」で配分することになる。このように全ての投資家が同じ情報をもとに合理的に行動するとした場合、どのリスク資産をどの比率で保有すべきか (i.e., 接点ポートフォリオ) が一意に決まり、全員が同じリスク資産のポートフォリオを持つことになる。

この結果、接点ポートフォリオは市場平均に一致することになる。いま、リスク資産として i と j だけが存在し、その時価総額比率が $i : j = 70 : 30$ であるとする。また、全員が期待収益等の情報をもとにそれらの保有比率を $i : j = 60 : 40$ にしたいと考えたとする。すると、リスク資産は発行総量の限られた“パイ”であるため、資産 i には発行量 70% に比べて需要不足（売り）が、

資産 j には発行量 30% に比べて需要超過（買い）が発生することになる。結果、資産 i の価格は下落、資産 j の価格は上昇し、投資家の目指す保有比率 60 : 40 と一致するまで両資産の時価総額比率が調整され続ける。こうして投資家全体でみたときの各リスク資産の保有比率は、それらの時価総額の比率に一致することになる。このように全ての投資家が同じ情報をもとに合理的に行動するとした場合、全員が同じリスク資産を最適なポートフォリオの構成要素として求めるだけでなく、それらの最適な保有比率が当該リスク資産の時価総額比率に一致することになる。これは、TOPIX などの時価総額加重型市場平均⁶は、理論的には各投資家が最適な比率でリスク資産に資金配分した結果であることを意味する。なお、市場における時価総額比率の写しとなっている接点ポートフォリオを特に、市場ポートフォリオと言う。

2-6. CAPM : 市場ポートフォリオの最適性と微小純増投資

これまで見てきたように接点ポートフォリオとは、市場に流通している投資可能なリスク資産を最適な比率で組み合わせたポートフォリオである。それゆえに、全ての投資家が同様に合理的に行動する場合、接点ポートフォリオは市場の時価総額比率と一致する（i.e., 市場ポートフォリオとなる）ことになる。だが、本当に市場ポートフォリオは最適なのであろうか。どうすればそれを検証できるのであろうか。

ここで言う「最適」とは、リスクあたりの期待超過収益（i.e., シャープレシオ）が最大であることを意味するが、シャープレシオが最大、つまり局所的に極大であれば、それを微分して局所勾配を求めるとその値はゼロになるはずである。これを投資に置き換えると、市場ポートフォリオ M を保有している投資家が、その一部を成すリスク資産 i を極めてわずかな量 ε だけ購入した状態（微小純増投資⁷）に相当する。このときのシャープレシオの変化量がゼロになると仮定したときに導かれる命題を通じ、CAPM では市場ポートフォリオの

⁶ 日経平均は時価総額ではなく株価で重み付けするため、理論上は一致しない。

⁷ 「既に所有している市場ポートフォリオ M の一部をわずかな量 ε だけ売り、それを資金に新たなリスク資産 i を買う（微小入れ替え投資）」と想定することも多いが、本論文では Sharpe (1964) に基づき、市場ポートフォリオ M の売りを行わない純増をもとに説明を行う。

最適性を検証可能な命題に落とし込む。

そこでまずは、市場ポートフォリオ M を保有した状態から、資産 i の微小純増投資を行って新たなポートフォリオ $M+i$ を構築したときのシャープレシオを計算する。まず資産 i の微小純増投資を行う前の市場ポートフォリオ M のシャープレシオは、ポートフォリオ M の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ をポートフォリオ p のリスク σ_p で除した値となる。

$$S_p = \frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_p}$$

ここに微小量 ε の資産 i を加えてポートフォリオ $M+i$ を作るわけであるが、微小純増投資を行えばその分、期待収益もリスクも変化しうる。つまり元の市場ポートフォリオ M には、微小純増投資に伴う期待収益の変動 $\Delta\mu_i$ とリスクの変動 $\Delta\sigma_i$ が生じるため、微小純増投資後のポートフォリオ $M+i$ のシャープレシオの式にもこれらの変動が加わることになる。

$$S_{M+i}(\varepsilon) = \frac{[E(r_M) - r_f] + \varepsilon\Delta\mu_i}{\sigma_M + \varepsilon\Delta\sigma_i}$$

ここで、元の市場ポートフォリオ M が最適であれば、この式を ε で一階微分して計算される局所勾配がゼロになるはずである。つまり以下の式が成り立つ。

$$\frac{\Delta\mu_i\sigma_M - (E(r_M) - r_f)\Delta\sigma_i}{\sigma_M^2} = 0$$

これを整理すると以下ようになる。

$$\Delta\mu_i\sigma_M = (E(r_M) - r_f)\Delta\sigma_i$$

つまり微小純増投資後のポートフォリオ $M+i$ のシャープレシオを計算するには、微小純増投資によって生じる期待収益の変動 $\Delta\mu_i$ とリスクの変動 $\Delta\sigma_i$ の 2 つを求める必要がある。

まず期待収益の変動 $\Delta\mu_i$ であるが、シャープレシオは無リスク資産に対する期待超過収益をもとに計算される。微小純増投資したときの期待収益もこれに合わせ、資産 i の期待収益から無リスク資産の収益を引き、無リスク資産に対する期待超過収益 $E(r_i) - r_f$ を求める。これを購入量 ε 倍した値を、元の市場ポートフォリオ M の期待収益 $E(r_M)$ に加えたものが、資産 i の微小純増投資後

の期待収益 $E(r_{M+i})$ となる。

$$E(r_{M+i}) = E(r_M) + \varepsilon[E(r_i) - r_f]$$

但し、資産 i の購入の購入量 ε は極めてわずかな量で、限りなくゼロに近い。そこで上記の式を ε について一階微分し、資産 i の微小純増投資を行うことによる期待収益の変動 $\Delta\mu_i$ を求めると、下記ようになる。

$$\Delta\mu_i = E(r_i) - r_f$$

一方、リスクの変動 $\Delta\sigma_i$ であるが、資産 i の微小純増投資後のリスク σ_{M+i}^2 は以下の式で与えられる（脚注3参照）。

$$\sigma_{M+i}^2 = \sigma_M^2 + 2\varepsilon \text{Cov}(r_i, r_M) + \varepsilon^2 \sigma_i^2$$

資産 i の純増投資量 ε は極めてわずかであるため、上記の式を ε について一階微分し、下記の資産 i の微小純増投資を行うことによるリスクの変動 $\Delta\sigma_i^2$ を導く。

$$\Delta\sigma_i^2 = 2\text{Cov}(r_i, r_M) + 2\varepsilon\sigma_i^2$$

このうち $2\varepsilon\sigma_i^2$ については、微小投資 $\varepsilon \rightarrow 0$ においては ε が極めて小さな値になるため、無視できる。結果、資産 i の微小純増投資を行うことによるリスクの変動 $\Delta\sigma_i^2$ は、資産 i と市場ポートフォリオ M の共分散に定数倍で比例することになる。

$$\Delta\sigma_i^2 \approx 2\text{Cov}(r_i, r_M)$$

微小純増投資によるリスクの変動 $\Delta\sigma_i^2$ が資産 i と市場ポートフォリオ M の共分散に比例する意味は、以下の通りである。共分散は、市場ポートフォリオ M の期待収益 $E(r_M)$ が上昇した際に資産 i の期待収益 $E(r_i)$ も上昇するなど、市場ポートフォリオと資産 i の値動きが相関するほど、大きな正の値となる。この状態で資産 i の微小純増投資を行えば、保有資産が増える分、リスクも元の市場ポートフォリオ M から増加する。反対に、市場ポートフォリオ M の期待収益 $E(r_M)$ が上昇したときには資産 i の期待収益 $E(r_i)$ が下落するなど、市場ポートフォリオと資産 i の値動きが逆行するほど、共分散は大きな負の値となる。この状態で資産 i の微小純増投資を行えば、元の市場ポートフォリオ M のリスクを資産 i のリスクが打ち消すため、リスクが減少する。上記の式はこの関係性を示している。

但しリスクの増分 $\Delta\sigma_i^2$ は期待収益の分散で二乗されているため、期待収益の単位と整合しない。そこでその正の平方根 $\Delta\sigma_i$ を求める必要がある。一般に、分散がごくわずかな量 $\Delta\sigma^2$ だけ増えた際の標準偏差の変化 $\Delta\sigma$ は、テイラー展開より、 $f(\sigma^2 + \Delta\sigma^2) \approx f(\sigma^2) + f'(\sigma^2)\Delta\sigma^2$ となる。これを資産 i の微小純増投資に適用すると以下ようになる。

$$\Delta\sigma_i = f(\sigma_M^2 + \Delta\sigma_i^2) - f(\sigma_M^2) \approx f'(\sigma_M^2)\Delta\sigma_i^2$$

また、平方根関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数は $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ となるため、 $f'(\sigma_M^2) = 1/(2\sigma_M)$ となる。加えて微小純増投資では $\Delta\sigma_i^2 \approx 2Cov(r_i, r_M)$ であったため、資産 i の微小純増投資によるリスクの増分 $\Delta\sigma_i$ は最終的に以下ようになる。

$$\Delta\sigma_i \approx f'(\sigma_M^2)\Delta\sigma_i^2 = \frac{1}{2\sigma_M}\Delta\sigma_i^2 = \frac{2Cov(r_i, r_M)}{2\sigma_M} = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M}$$

2-7. CAPM：期待（超過）収益の決定因子

以上により、資産 i の微小純増投資後のポートフォリオについて、期待収益の変動 $\Delta\mu_i$ とリスクの変動 $\Delta\sigma_i$ が揃ったため、微小純増投資後のポートフォリオ $M+i$ のシャープレシオを ε で一階微分した式に代入、整理する。結果、以下の CAPM の中心式が得られる。

$$E(r_i) - r_f = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} [E(r_M) - r_f]$$

このうち $Cov(r_i, r_M)/\sigma_M^2$ は、市場平均の変動に対する感度（市場感応度）と位置づけられ、 β と記される。この意味することは以下の通りである。

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

借入金が多いなど、財務レバレッジの高い企業は、市場平均が上昇する局面では株価が市場平均よりも上昇し、市場平均が下落する局面ではより下落する傾向がある。一方、電力株やガス株などのディフェンシブ銘柄は、市場平均が変動しても値動きが安定している。このように市場全体が急騰・急落した際にリスク資産がどれほどそれに連動するかは資産ごとに異なるが、市場感応度 β はまさしくこの性質を表す。すなわち市場平均と資産 i の共分散 $Cov(r_i, r_M)$ を市

場平均の分散 σ_M^2 で割った値であるため、資産 i は市場平均の変動にどれほど連動するかを表している。この結果、市場平均が上昇した場合、正の β の資産は市場平均と同じく上昇し、負の β の資産は市場平均と逆に下落することになる。

また、 β の絶対値が1より大きい資産であれば市場平均よりも大きく上昇し、 β の絶対値が1未満の資産であれば市場平均よりも小さく上昇することになる。したがって「 β の絶対値が大きい」ということは、その資産は市場平均よりも大きく値上がりする可能性もあるが大きく値下がりする可能性もあり、リスクが大きいことになる。そのため、それに投資してリスクを冒す以上は相応のリターン(リスクプレミアム)が期待できなければ割に合わないことになる。

ここに、本節の冒頭で述べた「システマティックリスクに対してどれほどのリターンを求めるべきか」という問題に対するCAPMの答えがある。

上述したように、投資に伴うリスクは、投資した資産に固有のリスク(i.e., 非システマティックリスク)と、市場全体に共通するリスク(i.e., システマティックリスク)に大別できる。また、前者は十分な分散投資を行うことで大幅に相殺・低減できるため、リスクに見合うリターンを求めることは非合理となる。一方で後者のリスクは分散投資を行っても制御が困難であるため、そのリターンを求めるほうが寧ろ合理的となる。ここで先ほどのCAPMの中心式を見ると、左辺の資産 i の期待超過収益 $[E(r_i) - r_f]$ は、資産 i の市場感応度 β_i と市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ の積になることが分かる。市場感応度 β_i は、市場全体の変動に資産 i がどれほど連動するかを表すため、市場平均への投資では制御できない市場全体の変動、すなわちシステマティックリスクからの影響の強さとなる。この強さに市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ が掛け合わされた値が左辺のリスク資産 i の期待超過収益 $[E(r_i) - r_f]$ となるため、上記の式は、システマティックリスクに対するリターン(リスクプレミアム)が市場平均の変動との連動性と市場平均の期待超過収益の積となることを示している。例えば資産 i の市場感応度 β_i が2であれば、市場全体が上昇・下落すると資産 i は平均してその2倍の上昇・下落を示すこと、つまり資産 i はシステマティックリスクから市場平均の2倍の影響を受けることを意味す

る。そのため、資産 i はリスクの大きい資産となり、そこに投資する場合、市場リスクプレミアムの 2 倍の超過収益が期待できなければ割に合わないことになる。このように CAPM により、システムティックリスクに対して投資家が求めるべきリターンが具体的に導かれる。

また中心式は、それを変形することで背後にリスク回避的な投資行動が想定されていることが分かる。中心式の左辺は無リスク資産に対するリスク資産 i の期待超過収益 $E(r_i) - r_f$ であるが、左辺の無リスク資産の収益 r_f を右辺に移項し、左辺をリスク資産 i の期待収益 $E(r_i)$ とすると、以下のように展開される。

$$E(r_i) = r_f + \beta_i [E(r_M) - r_f]$$

これは言わば、最初に短期国債などの無リスク資産を通じて収益 r_f が確保され、そこに追加収益としてリスク資産 i の購入が検討される過程に対応している。最低限の収益を確保するうえ、リスク資産に対してはリスク量 β_i に比例してリスクプレミアム (i.e., 市場平均の期待超過収益) を要求するため、リスクを嫌った投資行動と言える。

さらに CAPM の中心式は回帰式としての意味も持つ。中心式は、資産 i の期待収益 $E(r_i)$ が、市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ と資産 i の市場感応度 β_i の積となっており、 $y = a + bx$ の構造をしていることが分かる。また、回帰係数に相当する市場感応度 β_i は、リスク資産 i と市場平均の共分散を市場平均の分散で割った値 (i.e., $Cov(r_i, r_M) / \sigma_M^2$) であるが、これは、市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ を説明変数、リスク資産 i の期待収益 $E(r_i)$ を目的変数とする単回帰式の傾き (i.e., 回帰係数) に一致する。つまり CAPM の中心式は、リスク資産 i の期待収益が市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ の一変数関数となることを意味している。

2-8. CAPM：指数連動型の優位性

最後に、本論文の主題「指数連動型と個別裁量型の資産運用のどちらを選ぶべきか」に CAPM はどう関係するのであろうか。この問題を考えるためには、指数連動型と個別裁量型のそれぞれについて先の中心式から導かれる収益とリスクを考える必要がある。

CAPM では、リスク資産 i の期待超過収益 $E(r_i) - r_f$ は、リスク資産 i の市

場感応度 β_i と市場平均の期待超過収益 $[E(r_M) - r_f]$ の積となる。ここで、市場平均に投資した場合のポートフォリオ p についてその期待収益とリスクを考える。ポートフォリオ p は市場平均と同一であるため、その収益もリスクも市場平均と同じになる。つまり指数連動型の資産運用は、市場平均と同じリスクで市場平均と同じ期待超過収益を享受する方法に他ならない。

では個別裁量型の資産運用ではどうであろうか。CAPM の中心式は、リスク資産の期待超過収益を目的変数、市場平均の期待超過収益を説明変数、市場感応度を回帰係数とした単回帰式でもある。そのためポートフォリオ p の超過収益 $r_p - r_f$ 、その期待値 $E(r_p - r_f)$ 、およびその分散で表されるリスク $Var(r_p - r_f)$ はそれぞれ下記のようになる。なお、 ε_p は市場平均の期待超過収益から予測できない残差を意味する。

$$\begin{aligned} r_p - r_f &= \beta_p [r_M - r_f] + \varepsilon_p \\ E(r_p - r_f) &= \beta_p [E(r_M) - r_f] + E(\varepsilon_p) \\ Var(r_p - r_f) &= \beta_p^2 \times Var(r_M - r_f) + Var(\varepsilon_p) \end{aligned}$$

上記 2 番目の式はポートフォリオ p の期待超過収益 $E(r_p - r_f)$ を表すが、 $E(\varepsilon_p)$ は回帰式の残差の平均値であるため、ゼロと仮定される。したがって同式は、個別裁量型として市場平均とは異なる時価総額比率でポートフォリオ p を構築しても、結局はその期待超過収益 $E(r_p - r_f)$ は市場平均の期待超過収益を β 倍した値に留まることを意味する。一方で上記 3 番目の式はポートフォリオ p のリスク $Var(r_p - r_f)$ を表すが、その値は、市場平均のリスクに市場感応度 β の二乗を掛けた値と残差リスクの合計となっている。つまり、個別裁量型運用は、期待超過収益は市場平均の期待超過収益を β 倍したものに留まる反面、リスクは市場平均のリスクを β 倍（分散ベースで β^2 倍）したうえでそれに残差の分のリスクが上乘せされた投資方法となる。つまり個別裁量型運用は、市場平均に投資する指数連動型に比べてリスク調整済み期待超過収益の点で劣後する投資方法となる。特に、残差の平均値 $E(\varepsilon_p)$ はゼロと仮定されるが、理論値に収束しやすくなる長期運用ほど個別裁量型投資は不利になりやすいことになる。

2-9. CAPM：まとめ

以上のように CAPM は、「各投資家が各資産をその収益の平均値と分散で評価する」「全ての投資家は各資産の収益に関する分布を把握しており、それを踏まえて合理的に行動する」などの前提をもとに、資産のリスクと期待すべき収益との定量的関係性を理論的に示した。またそれにより、個別裁量型運用は市場平均から乖離するからこそ指数連動型運用に劣後することを理論的に描き出した。これらの知見はその後、「リスク資産 i の期待収益は本当に中心式だけで説明できるのか (i.e., 残差 $E(\varepsilon_p)$ は存在しないのか)」「中心式だけではリスク資産 i の期待収益を説明しきれないとすれば他に何がリスク資産 i の期待収益の規定要因になるのか」といった問いを生み出すことになり、リスク資産への投資を理解するうえで極めて重要な理論的基盤になっている。

引用文献

- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 21, 279-292.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7, 77-91.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 34, 768-783.
- 日本銀行調査統計局 (2025). 2024 年第 4 四半期の資金循環 (速報). 日本銀行. Retrieved May 5, 2025, from <https://www.boj.or.jp/statistics/sj/sjall.pdf>
- 日本取引所グループ (n.d.). 銘柄一覧 (ETF). 日本取引所グループ Retrieved May 5, 2025, from <https://www.jpx.co.jp/equities/products/etfs/issues/01-01.html>
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19, 425-442.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of Business*, 39, 119-138.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25, 65-86.